Τυχαίες Μεταβλητές

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Τυχαίες Μεταβλητές

Τυχαία μεταβλητή X είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει κάθε απλό ενδεχόμενο ενός πειράματος σε *έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό*, απεικονίζει δηλαδή κάθε στοιχείο ενός δειγματικού χώρου Ω σε έναν πραγματικό αριθμό. Δηλαδή

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

Η τυχαία μεταβλητή X λοιπόν αντιστοιχίζει το στοιχείο s του Δειγματοχώρου Ω στον αριθμό x:

$$X(s) = x.$$

Τυχαίες Μεταβλητές – Κατανομές

Δηλαδή μια τυχαία μεταβλητή

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

μετασχηματίζει τον δειγματικό χώρο Ω σε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Με τον όρο «κατανομή της X» εννοούμε τον νόμο-συνάρτηση που αντιστοιχίζει ή αποδίδει κάποια πιθανότητα σε κάθε τιμή $x \in R$ της τυχαίας μεταβλητής ή σε διαστήματα τιμών της.

Παράδειγμα

Κατά την ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές ορίζουμε ως X τον αριθμό των γραμμάτων στις 3 ρίψεις. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$$\Omega = \{ KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma \}$$

Επομένως η συνάρτηση X ορίζεται από τον πίνακα

$\omega \in \Omega$	ΚΚΚ	ΚΚΓ	ΚΓΚ	ΓΚΚ	ΚΓΓ	ΓΚΓ	ΓΓΚ	ΓΓΓ
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Τυχαίες Μεταβλητές

- Οι ***ποσοτικές*** τυχαίες μεταβλητές χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες στις
- ***διακριτές ή απαριθμητές***

και στις

- ***συνεχείς***

Κατανομή διακριτής (ή απαριθμητής) τυχαίας μεταβλητής

Με τον όρο «κατανομή της X» εννοούμε την αντιστοιχία των τιμών x_i της X και των πιθανοτήτων:

$$p_i = P[X=x_i]$$

με τις οποίες λαμβάνει η X κάθε μια από τις τιμές x_i. Η συνάρτηση p_i καλείται **συνάρτηση πιθανότητας**.

Συνάρτηση Κατανομής

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή, η οποία ορίζεται σε ένα δειγματικό χώρο Ω. Η πραγματική συνάρτηση

$$F \; : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

Που δίνεται από τον τύπο

$$F(t) = P[X \le t] = P\left[\left\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le t\right\}\right] = \sum_{x_i \le t} p_i$$

Λέγεται *αθροιστική συνάρτηση κατανομής* ή απλούστερα **συνάρτηση κατανομής** της τυχαίας μεταβλητής X.

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 2 φορές. Έστω X ο αριθμός των γραμμάτων στις 2 ρίψεις. Οπότε η τυχαία μεταβλητή Χ λαμβάνει μόνον τις τιμές 0, 1, 2, σύμφωνα με τον πίνακα:

$\omega \in \Omega$	ΚΚ	ΚΓ	ΓΚ	ΓΓ
$X(\omega)$	0	1	1	2

Η συνάρτηση πιθανότητας προσδιορίζεται ως ακολούθως:

$\mathbf{p_0}$=P(X=0)=1/4 $\mathbf{p_1}$=P(X=1)=1/2 $\mathbf{p_2}$=P(X=2)=1/4

p_0=*P(X=0)=1/4*   ***p_1***=*P(X=1)=1/2*   ***p_2***=*P(X=1)=1/4*

Τώρα η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X που δίνεται από τον τύπο

$$F(t) = \sum_{x_i \le t} p_i$$

έχει ως εξής:

- $F(0)=p_0=1/4$

  $F(t)=1/4$ για $0 \le t<1$

- $F(1)=p_0+p_1=1/4 + 1/2 = 3/4$

  $F(t)=3/4$ για $1 \le t<2$

- $F(2)=p_0+p_1+p_2=1/4 + 1/2 +1/4= 1$

  $F(t)=1$ για $t\ge 2$

Μέση τιμή διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Η μέση τιμή διακριτής τυχαίας μεταβλητής δίνεται από τον τύπο:

$$\mu = E(X) = \sum_{i} x_i P(x_i)$$

όπου $P(x_i)$ η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει την τιμή x_i.

Πρόταση: *Η μέση τιμή είναι γραμμική συνάρτηση*

Η **μέση τιμή** αλλιώς λέγεται και ***αναμενόμενη τιμή***, ***μαθηματική ελπίδα*** ή ***ροπή πρώτης τάξης***. Εκφράζει ποια θα είναι η αναμενόμενη έκβαση του πειράματος σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

Μέση τιμή
ένα παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι στο 1ο εξάμηνο μιας Σχολής διδάσκονται 4 μαθήματα. Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή X που μετρά τον αριθμό των μαθημάτων που χρωστά ένας φοιτητής μετά τις εξετάσεις του 1ου εξαμήνου. Η τυχαία μεταβλητή X μπορεί να πάρει 5 τιμές: 0, 1, 2, 3, 4.

Ας υποθέσουμε ότι οι πιθανότητες για την τυχαία μεταβλητή X να λάβει τις 5 αυτές τιμές δίνονται από τον πίνακα που ακολουθεί:

x	0	1	2	3	4
P(x)	0,3	0,3	0,25	0,1	0,05

Μέση τιμή
ένα παράδειγμα

Στο παράδειγμα αυτό η μέση τιμή είναι μια τιμή στο διάστημα [0, 4] όπου βρίσκονται οι τιμές της X. Προκειμένου να την υπολογίσουμε καταρτίζουμε τον πίνακα:

x	0	1	2	3	4
P(x)	0,3	0,3	0,25	0,1	0,05
x·P(x)	0	0,3	0,5	0,3	0,2

Οπότε

$\mu = \mathbf{0}\cdot 0{,}3+\mathbf{1}\cdot 0{,}3+\mathbf{2}\cdot 0{,}25+\mathbf{3}\cdot 0{,}1+\mathbf{4}\cdot 0{,}05 = 0+0{,}3+0{,}5+0{,}3+0{,}2 = 1{,}3$

Έχουμε επομένως ότι $\mu=1{,}3$ δηλαδή περιμένουμε οι φοιτητές μετά τα αποτελέσματα του $1^{ου}$ εξαμήνου να χρωστούν περίπου 1 μάθημα.

Διακύμανση της Χ

Η ***διακύμανση*** μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με σ^2 και ισούται με:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E[(X-E(X))^2] = \sum_i [x_i - E(X)]^2 P(x_i)$$

Πρόταση. *Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο*

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Απόδειξη: $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 =$

$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Ας εφαρμόσουμε τους τύπους στο Παράδειγμα

x	0	1	2	3	4
P(x)	0,3	0,3	0,25	0,1	0,05
x^2	0	1	4	9	16

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - [\mathrm{E}(\mathrm{X})]^2 = \sum_{x=0}^{4} x^2 P(x) - \mu^2 =$$

$$= 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}25 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}05 - 1{,}3^2 = 1{,}31$$

Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{X})} = \sqrt{1{,}31} = 1{,}14$$