Δεσμευμένη Πιθανότητα
Θεώρημα Ολικής πιθανότητας
Θεώρημα του Bayes

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Υπάρχουν περιπτώσεις που υπολογίζουμε την πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σε ένα *υποσύνολο* του δειγματικού χώρου. Οι πιθανότητες αυτές ονομάζονται **δεσμευμένες πιθανότητες**.

Για ***παράδειγμα***

η πιθανότητα μια ημέρα να εκδηλωθεί βροχή είναι μεγαλύτερη αν την ημέρα αυτή επικρατεί συννεφιά.

η πιθανότητα ένα χαρτί τυχαία επιλεγμένο από μια τράπουλα να είναι «σπαθί» είναι μεγαλύτερη αν γνωρίζουμε ότι από την τράπουλα έχουν αφαιρεθεί τα μπαστούνια.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Η δεσμευμένη πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου *A*, δοθέντος ότι έχει ήδη συμβεί το ενδεχόμενο *B*, το οποίο περιορίζει τον αρχικό δειγματικό χώρο του *A*, συμβολίζεται με ***P(A|B)*** και ορίζεται ως εξής:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)>0$$

Το ***P(A|B)*** διαβάζεται «πιθανότητα του ενδεχομένου *A*, δοθέντος του ενδεχομένου *B*»

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

- Από τον ορισμό της Δεσμευμένης Πιθανότητας ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

- Αν $P(A|B) \neq P(A)$ συμπεραίνουμε ότι η πληροφορία ότι το *B* έχει συμβεί έχει ως αποτέλεσμα να *<u>μεταβληθεί</u>* η πιθανότητα να συμβεί το *A*. Αντίθετα αν, $P(A|B) = P(A)$ η πληροφορία ότι το *B* έχει συμβεί *<u>δεν έχει καμία επίδραση</u>* στην πιθανότητα να συμβεί το *A*. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι το *A* **είναι ανεξάρτητο** του *B*. Αν δύο ενδεχόμενα *A* και *B* είναι ανεξάρτητα τότε ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Παράδειγμα 1

Μια εταιρεία απασχολεί 350 εργαζόμενους. Ο πίνακας των μισθών ανά κατηγορία (υψηλή / χαμηλή) και ανά φύλο δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Μισθός / Φύλο	Χαμηλός	Υψηλός	Σύνολο
Γυναίκα	252	28	**280**
Άνδρας	63	7	**70**
Σύνολο	**315**	**35**	**350**

Είναι οι μισθοί ανεξάρτητοι του φύλου;

Έστω τα ενδεχόμενα

Γ = {ο εργαζόμενος είναι γυναίκα}	**Α = {ο εργαζόμενος είναι άντρας}**
Χ = {ο εργαζόμενος είναι χαμηλόμισθος}	Υ = {ο εργαζόμενος είναι υψηλόμισθος}

Τότε έχουμε

Μισθός / Φύλο	Χαμηλός	Υψηλός	Σύνολο
Γυναίκα	252	28	280
Άνδρας	63	7	70
Σύνολο	315	35	350

$$P(\Gamma) = \frac{280}{350} \quad P(A) = \frac{70}{350} \quad P(X) = \frac{315}{350} \quad P(\Upsilon) = \frac{35}{350}$$

$$P(\Gamma \cap X) = \frac{252}{350} \quad P(\Gamma \cap \Upsilon) = \frac{28}{350} \quad P(A \cap X) = \frac{63}{350} \quad P(A \cap \Upsilon) = \frac{7}{350}$$

Επειδή ισχύουν

$$P(\Gamma)\cdot P(X) = \frac{280}{350}\cdot\frac{315}{350} = \frac{252}{350} = P(\Gamma \cap X)$$

$$P(\Gamma)\cdot P(Y) = \frac{280}{350}\cdot\frac{35}{350} = \frac{28}{350} = P(\Gamma \cap Y)$$

$$P(A)\cdot P(X) = \frac{70}{350}\cdot\frac{315}{350} = \frac{63}{350} = P(A \cap X)$$

και

$$P(A)\cdot P(Y) = \frac{70}{350}\cdot\frac{35}{350} = \frac{7}{350} = P(A \cap Y)$$

τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους

Παράδειγμα 2

Μια εταιρεία κατέγραψε το μισθό των εργαζομένων της χρησιμοποιώντας τις ενδείξεις *«Χαμηλόμισθος»* (Χ) και *«Υψηλόμισθος»* (Υ), ανά επίπεδο εκπαίδευσής τους. Η καταγραφή παρατίθεται στον ακόλουθο πίνακα:

Μισθός / Επίπεδο εκπαίδευσης	Χαμηλόμισθος (Χ)	Υψηλόμισθος (Υ)
Απολυτήριο Δημοτικού (ΑΔ)	40	5
Απολυτήριο Μέσης Εκπαίδευσης (ΑΜ)	25	60
Πτυχίο Ανώτατης Σχολής (Π)	5	25

(i) Ποια η πιθανότητα ένας εργαζόμενος να έχει απολυτήριο μέσης εκπαίδευσης και να είναι υψηλόμισθος;

(ii) Ποια η πιθανότητα ένας εργαζόμενος να έχει πτυχίο ανώτατης σχολής ή να είναι χαμηλόμισθος;

(iii) Αν ένας από τους εργαζόμενους έχει πτυχίο ανώτατης σχολής, ποια η πιθανότητα να είναι υψηλόμισθος;

(iv) Είναι το γεγονός ενός εργαζόμενου με απολυτήριο μέσης εκπαίδευσης ανεξάρτητο του γεγονότος ότι είναι υψηλόμισθος;

Συμπληρώνουμε τον πίνακα διπλής εισόδου ώστε να περιέχει και τα αθροίσματα γραμμών και στηλών, και διαμορφώνεται ως εξής:

Μισθός / Επίπεδο εκπαίδευσης	Χαμηλός (Χ)	Υψηλός (Υ)	ΣΥΝΟΛΟ
Απολυτήριο Δημοτικού (ΑΔ)	40	5	45
Απολυτήριο Μέσης Εκπαίδευσης (ΑΜ)	25	60	85
Ανώτατης Σχολής (Π)	5	25	30
ΣΥΝΟΛΟ	70	90	160

Ορίζουμε, περαιτέρω, τα ενδεχόμενα:

$$\mathbf{Α\Delta} = \{\text{Απολυτήριο Δημοτικού}\}$$
$$\mathbf{ΑΜ} = \{\text{Απολυτήριο Μέσης Εκπαίδευσης}\}$$
$$\mathbf{\Pi} = \{\text{Πτυχίο Ανώτατης Σχολής}\}$$
$$\mathbf{Χ} = \{\text{Χαμηλόμισθος}\},\ \ \mathbf{Υ} = \{\text{Υψηλόμισθος}\}.$$

i) Η πιθανότητα ένας εργαζόμενος να έχει απολυτήριο μέσης εκπαίδευσης και να είναι υψηλόμισθος είναι ίση με:

$$P(AM \cap Y) = \frac{60}{160} = 0{,}375.$$

Μισθός / Επίπεδο εκπαίδευσης	Χαμηλός (Χ)	Υψηλός (Υ)	ΣΥΝΟΛΟ
Απολυτήριο Δημοτικού (ΑΔ)	40	5	45
Απολυτήριο Μέσης Εκπαίδευσης (ΑΜ)	25	60	85
Ανώτατης Σχολής (Π)	5	25	30
ΣΥΝΟΛΟ	70	90	160

ii) Η πιθανότητα ένας εργαζόμενος να έχει πτυχίο ανώτατης εκπαίδευσης ή να είναι χαμηλόμισθος είναι ίση με:

$$P(\Pi \cup X) = P(\Pi) + P(X) - P(\Pi \cap X) = \frac{30}{160} + \frac{70}{160} - \frac{5}{160} = \frac{95}{160} = 0{,}5938.$$

iii) $P(Y|\Pi) = \frac{P(Y \cap \Pi)}{P(\Pi)} = \frac{\frac{25}{160}}{\frac{30}{160}} = \frac{25}{30} = 0{,}833.$

Διαφορετικά, δεδομένου ότι ο εργαζόμενος έχει Πτυχίο Ανώτατης Σχολής δεν ενδιαφερόμαστε πλέον για το σύνολο των 160 εργαζομένων αλλά για το σύνολο των εργαζομένων που έχουν Πτυχίο Ανώτατης Σχολής που είναι 30. Από αυτούς 25 εργαζόμενοι είναι υψηλόμισθοι. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y|\Pi) = \frac{25}{30} = 0{,}833.$$

iv) Τα ενδεχόμενα

$$AM = \{\text{Απολυτήριο Μέσης Εκπαίδευσης}\}$$

και $\quad Y = \{\text{Υψηλόμισθος}\}$

θα είναι ανεξάρτητα αν ικανοποιείται η ισότητα

$$P(AM \cap Y) = P(AM) \times P(Y).$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$P(AM \cap Y) = \frac{60}{160} = 0{,}375,$$

$$P(AM) = \frac{85}{160} = 0{,}5313, \quad P(Y) = \frac{90}{160} = 0{,}5625$$

και

$$P(AM) \times P(Y) = 0{,}5313 \times 0{,}5625 = 0{,}2989.$$

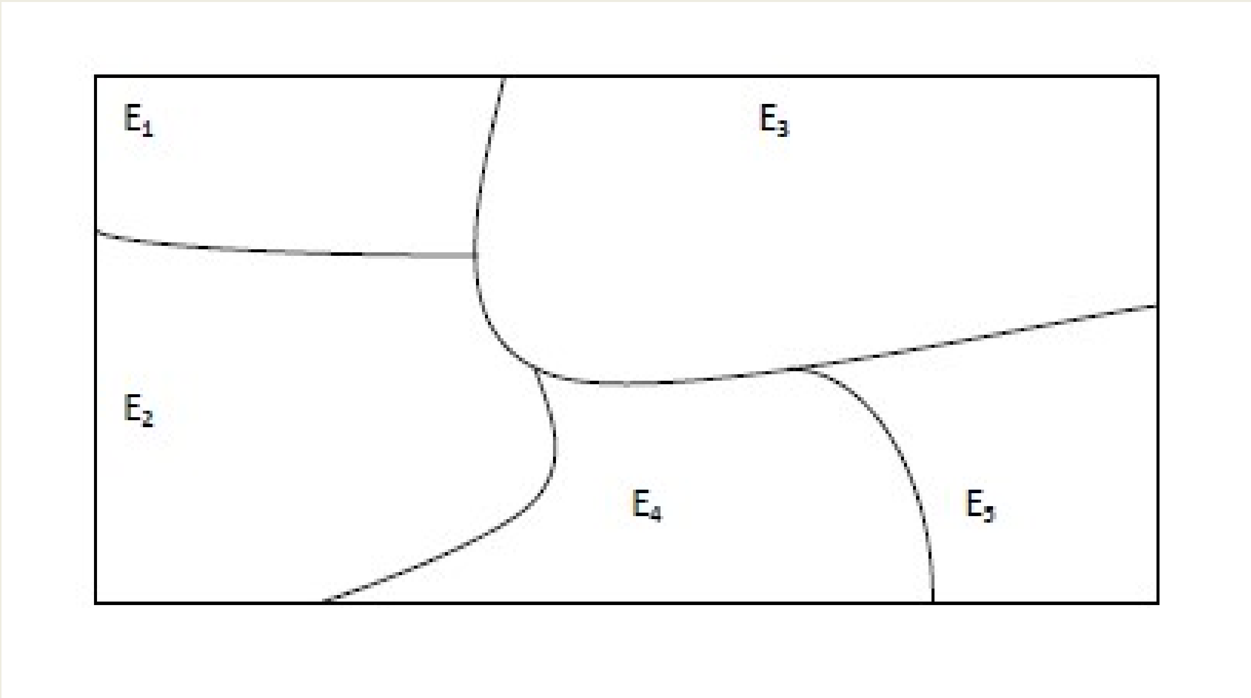
Παρατηρούμε ότι

$$P(AM \cap Y) \neq P(AM) \times P(Y).$$

Επομένως, τα ενδεχόμενα AM και Y είναι **εξαρτημένα**.

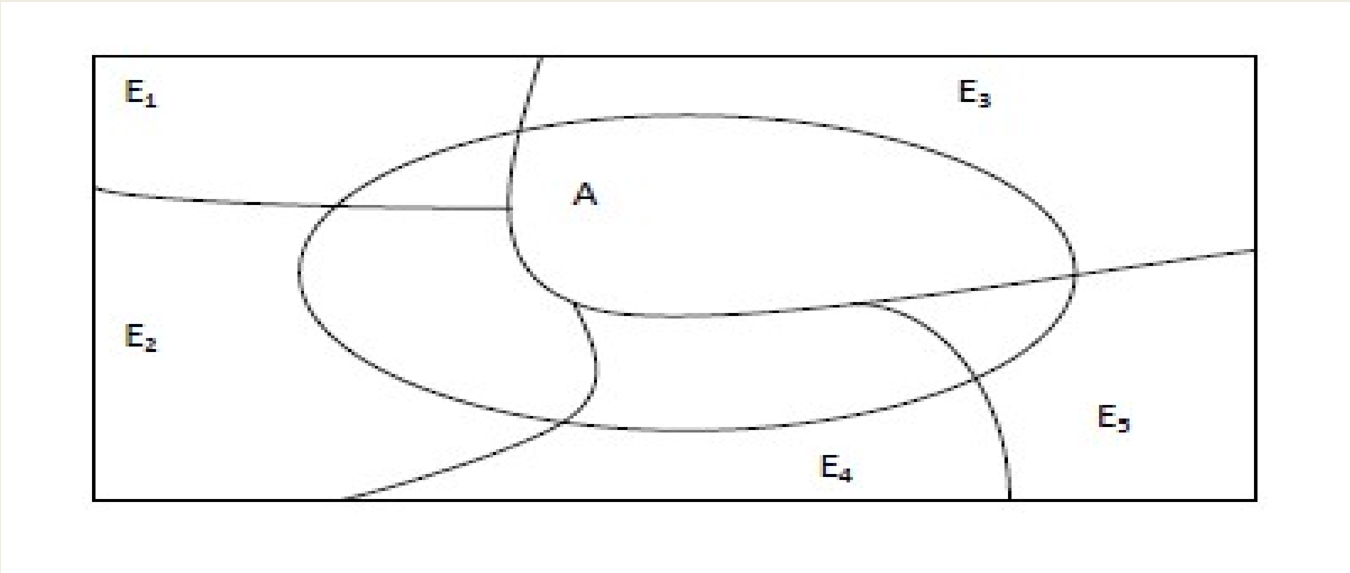
Διαμερισμός

- *Διαμερισμός του δειγματικού χώρου* καλείται ένα συλλογή από k σύνολα E_i που η ένωσή τους ισούται με τον δειγματικό χώρο και ανά δύο αυτά είναι ξένα μεταξύ τους. Δηλαδή $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = S$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, όπου i και j = 1,.. , k.



Διαμερισμός

- Αν θεωρήσουμε ένα ενδεχόμενο Α και το παραστήσουμε στο βέννειο διάγραμμα, τότε ο διαμερισμός του S παράγει και ένα διαμερισμό του Α. Ο διαμερισμός του Α είναι το σύνολο από τις τομές του Α με τα E_i.



Θεώρημα Ολικής πιθανότητας

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P\left(A \cap B_j\right) \Leftrightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{k} P\left(A \middle| B_j\right) \cdot P(B_j)$$

Όταν τα B_j αποτελούν ένα διαμερισμό του δειγματικού χώρου

Παράδειγμα

Μια χώρα αποτελείται από τρεις περιφέρειες. Κάθε περιφέρεια υπολογίζει το ποσοστό ανεργίας του πληθυσμού της και στέλνει, τα στατιστικά στην κεντρική κυβέρνηση. Ένας υπάλληλος της κεντρικής κυβέρνησης βλέπει τα ποσοστά ανεργίας για κάθε περιφέρεια. Πώς μπορεί να υπολογίσει ποιο είναι το ποσοστό ανεργίας για ολόκληρη τη χώρα;

Παράδειγμα

περιφέρεια	Ποσοστό πληθυσμού	Ποσοστό ανεργίας
B_1	0,60	0,25
B_2	0,30	0,22
B_3	0,10	0,18
	Σύνολο 1=100%	

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{Άνεργοι}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{A}|B_1)\cdot\mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}|B_2)\cdot\mathrm{P}(B_2) + \mathrm{P}(\mathrm{A}|B_3)\cdot\mathrm{P}(B_3) \\
&= 0{,}25\cdot 0{,}60 + 0{,}22\cdot 0{,}30 + 0{,}18\cdot 0{,}10 = 0{,}234
\end{aligned}
$$

Θεώρημα του Bayes

Έστω $B_1, \ldots, B_k$ μια διαμέριση ενός δειγματικού χώρου S. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A με $P(A)>0$ έχουμε:

$$P(A)P(B_i \mid A) = P(A \cap B_i) = P(B_i)P(A \mid B_i)$$

άρα $$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

επομένως

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)P(B_j)}$$

Παράδειγμα 1

Σε ένα εργοστάσιο οι μηχανές Α, Β και Γ παράγουν το 25%, το 35% και το 40% της συνολικής παραγωγής αντίστοιχα. Μετά από έλεγχο διαπιστώθηκε ότι το 5% των παραγόμενων τεμαχίων από τη μηχανή Α, το 4% των παραγόμενων τεμαχίων από τη μηχανή Β και το 2% των παραγόμενων τεμαχίων από τη μηχανή Γ είναι ελαττωματικά.

- **α.** Ένα από τα τεμάχια που έχουν παραχθεί λαμβάνεται τυχαία. Ποια η πιθανότητα να μην είναι ελαττωματικό;
- **β**. Ένα από τα τεμάχια που έχουν παραχθεί λαμβάνεται τυχαία και βρίσκεται ελαττωματικό. Ποια η πιθανότητα να έχει παραχθεί από την μηχανή Β;

Θεωρώ τα ενδεχόμενα:

- Α: το αντικείμενο να παραχθεί από τη μηχανή Α
- Β: το αντικείμενο να παραχθεί από τη μηχανή Β
- Γ: το αντικείμενο να παραχθεί από τη μηχανή Γ
- Ε: το αντικείμενο να είναι ελαττωματικό

Έχουμε: $P(A) = 0{,}25$ $\quad P(B) = 0{,}35$ $\quad P(\Gamma) = 0{,}4$

$P(E \mid A) = 0{,}05$ $\quad P(E \mid B) = 0{,}04$ $\quad P(E \mid \Gamma) = 0{,}02$

Τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ αποτελούν προφανώς μια διαμέριση και άρα χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας** έχω:

- $P(E)= P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(\Gamma)P(E|\Gamma) =$

  $= 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345.$
- Άρα $P(E') = 1-P(E) = 1- 0{,}0345 = 0{,}9655$

Ζητάμε την πιθανότητα το τεμάχιο να έχει κατασκευασθεί από την μηχανή *Β*, δεδομένου ότι είναι ελαττωματικό.

Άρα ζητάμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|E)$.

- Εφαρμόζουμε το **θεώρημα του Bayes** και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P(B|E) &= \frac{P(B)\cdot P(E|B)}{P(A)\cdot P(E|A)+P(B)\cdot P(E|B)+P(\Gamma)\cdot P(E|\Gamma)} \\
&= \frac{P(B)\cdot P(E|B)}{P(E)} \\
&= \frac{0{,}35*0{,}04}{0{,}0345} \\
&= 0{,}406
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2

Δύο ζευγάρια προγραμματίζουν μια βραδινή έξοδο ανάλογα με τον καιρό. Η πιθανότητα εξόδου είναι 0.75 αν δεν βρέξει και 0.25 αν βρέξει. Αν στην πόλη στην οποία ζουν τα ζευγάρια το ποσοστό των βροχερών ημερών είναι 20%,

(i) Να υπολογισθεί η πιθανότητα η βραδινή έξοδος να πραγματοποιηθεί.

(ii) Αν η βραδινή έξοδος πραγματοποιηθεί, ποια η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί υπό βροχή;

B_1 = {να βρέξει},

$B_2 = B_1^c$ = {να μη βρέξει}

και E = {να πραγματοποιηθεί η έξοδος}

i) Με βάση το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(E) = P(E|B_1) \cdot P(B_1) + P(E|B_2) \cdot P(B_2) = 0{,}25 \times 0{,}20 + 0{,}75 \times 0{,}80 = 0{,}65$$

ii) Με βάση το Νόμο του Bayes, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(B_1|E) = \frac{P(E|B_1) \cdot P(B_1)}{P(E)} =$$

$$= \frac{P(E|B_1) \cdot P(B_1)}{P(E|B_1) \cdot P(B_1) + P(E|B_2) \cdot P(B_2)}$$

$$= \frac{0{,}25 \times 0{,}20}{0{,}65} = \frac{0{,}05}{0{,}65} = 0{,}0769$$