Εισαγωγή στην Θεωρία Πιθανοτήτων

Καθηγητής Χρήστος Γ. Μασούρος

Δειγματικός χώρος

Δειγματικός χώρος ***Ω*** ενός πειράματος τύχης καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανισθούν σε μια εκτέλεσή του.

Παράδειγμα

Όταν ρίχνουμε ένα ζάρι, τότε τα δυνατά αποτελέσματα που μπορούν να εμφανισθούν είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ενδεχόμενα ή Γεγονότα

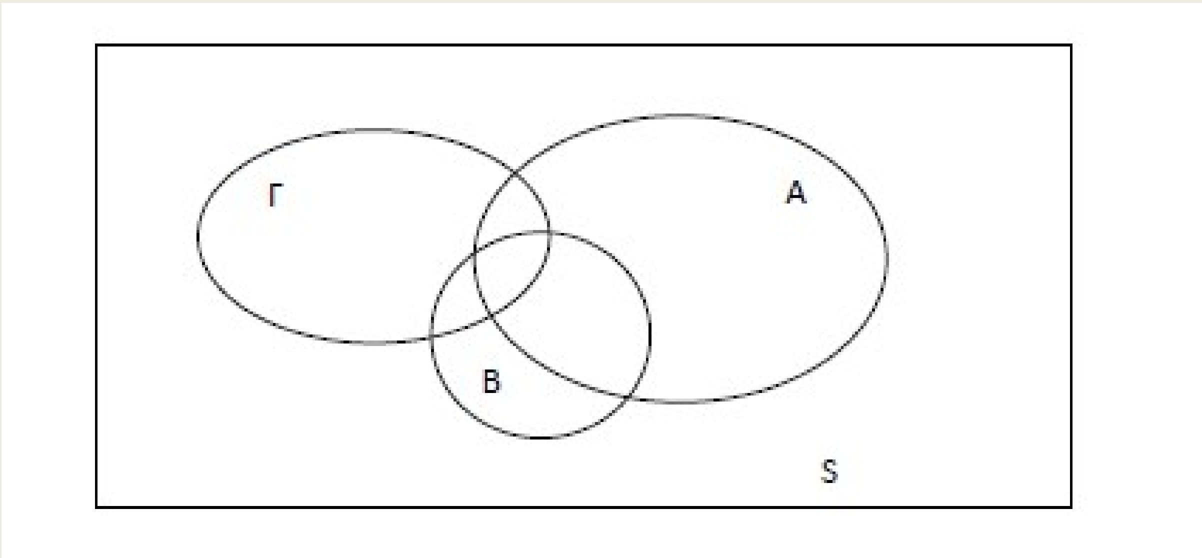
Τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου ***Ω*** ονομάζονται **ενδεχόμενα** ή **γεγονότα** και συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα ***Α***, ***Β***, ***Γ***, … Ειδικότερα τα μονομελή υποσύνολα του ***Ω*** ονομάζονται **απλά** ή **στοιχειώδη ενδεχόμενα** ενώ στην περίπτωση που το ενδεχόμενο ***Α*** περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία του δειγματικού χώρου λέγεται **σύνθετο ενδεχόμενο**.

- ***Παράδειγμα***

Στον δειγματικό χώρο του ζαριού το να έλθει άσσος κατά την ρίψη του, δηλ. να έχουμε ***Α***={***1***} είναι ένα στοιχειώδες ενδεχόμενο, ενώ το να έλθει ζυγός αριθμός, δηλ. ***Β***={***2,4,6***} είναι ένα σύνθετο γεγονός.

Ενδεχόμενα, Βέννειο διάγραμμα

Βέννειο διάγραμμα καλείται το διάγραμμα με το οποίο παριστάνουμε τα ενδεχόμενα ως σύνολα στο πλαίσιο του δειγματικού χώρου. Αν έχουμε τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ τότε τα παριστάνουμε ως εξής:



Πράξεις με ενδεχόμενα

- **Ένωση** $A \cup B$ δύο ενδεχομένων A και B
- **Τομή** $A \cap B$ δύο ενδεχομένων A και B

  (Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα** αν $A \cap B = \varnothing$)
- **Συμπλήρωμα** του ενδεχομένου A
- **Διαφορά** A-B δύο ενδεχομένων A και B

Πράξεις με ενδεχόμενα

- $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A} - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$
- $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$
- $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \Gamma) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \Gamma)$
- $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \Gamma) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \Gamma)$

Ο ορισμός της Πιθανότητας

- Ορισμός του **Laplace**
- Η **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου ορίζεται ως ο λόγος του πλήθους των ευνοϊκών για το ενδεχόμενο περιπτώσεων (δηλαδή του πλήθους των απλών ενδεχομένων που σχηματίζουν το υπό μελέτη ενδεχόμενο), δια του συνολικού αριθμού όλων των δυνατών περιπτώσεων :

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}}$$

Ο ορισμός της Πιθανότητας

- Ορισμός του **Andrei N. Kolomogorov**

Έστω S ένας δειγματικός χώρος και έστω *B* το σύνολο όλων των ενδεχομένων του S. Ορίζουμε ως συνάρτηση πιθανότητας μια συνάρτηση P:

$$P: B \rightarrow \mathbf{R}$$

η οποία σε κάθε ενδεχόμενο A αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό P(A) έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

- $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$, όπου $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S}$
- $\mathrm{P(S)} = 1$
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$,

όπου $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ ασυμβίβαστα (ξένα) ανά δύο ενδεχόμενα

Παράδειγμα

Τρεις φίλοι αποφάσισαν, χωρίς να το συζητήσουν μεταξύ τους, να εμπιστευθεί ο καθένας τους τις καταθέσεις του σε μία από πέντε διαφορετικές τράπεζες της πόλης τους. Ποια η πιθανότητα και οι τρείς να τοποθετήσουν τις καταθέσεις τους σε διαφορετική τράπεζα;

Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται με εφαρμογή του κλασσικού ορισμού της πιθανότητας. Τα δυνατά αποτελέσματα είναι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους οι τρείς φίλοι μπορούν να τοποθετήσουν τις καταθέσεις τους στις πέντε τράπεζες. Ο ένας εξ' αυτών έχει πέντε δυνατότητες, ο άλλος ομοίως πέντε δυνατότητες και πέντε δυνατότητες έχει και ο τρίτος. Επομένως, με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή,

$$\mathbf{N(S)=5\times5\times5=5^3=125}.$$

Για να τοποθετήσουν τις καταθέσεις τους σε διαφορετικές τράπεζες, ο πρώτος εξ' αυτών έχει πέντε δυνατότητες, ο δεύτερος τέσσερις και ο τρίτος έχει τρείς δυνατότητες. Και πάλι, λόγω της πολλαπλασιαστικής αρχής,

$$\mathbf{N(A)=5\times4\times3=60,}$$

με A να είναι το ενδεχόμενο

A= {οι τρείς φίλοι τοποθετούν τις καταθέσεις τους σε διαφορετική τράπεζα}.

Έτσι, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\mathbf{P(A) = N(A)/N(S) = 60/125 = 0,48}$$

Βασικά Θεωρήματα των Πιθανοτήτων

- Πιθανότητα του αδύνατου ενδεχόμενου: Αν $\emptyset$ είναι το αδύνατο ενδεχόμενο τότε $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
- Πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου: για κάθε ενδεχόμενο A του S ισχύει: $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$
- Πιθανότητα εγκλεισμού ενδεχομένων: αν A_1 και A_2 δύο ενδεχόμενα του S με A_2 υποσύνολο A_1 τότε: $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)$

Βασικά Θεωρήματα των Πιθανοτήτων

- Πιθανότητα διαφοράς ενδεχομένων:
  Αν A_1 και A_2 δυο ενδεχόμενα τότε
  $$P(A_1 - A_2) = P(A_1 \cap \overline{A}_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$$

- Πιθανότητα ένωσης ενδεχομένων:
  Αν A_1 και A_2 δυο ενδεχόμενα, τότε
  $$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

- Αν A_1 , A_2 , A_3 είναι τρία ενδεχόμενα, τότε:
  $$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ & -P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + \\ & +P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Βασικά Θεωρήματα των Πιθανοτήτων

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \\
&\quad = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - \\
&\quad\; - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \\
&\quad\; - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - \\
&\quad\; - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + \\
&\quad\; + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \\
&\quad\; + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \\
&\quad\; - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)
\end{aligned}
$$