Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Ορισμός: Μια συνάρτηση $z = f(x,y)$ έχει **μέγιστο** σε ένα σημείο $M_0(x_0,y_0)$ αν

$$f(x_0,y_0) > f(x,y)$$

για όλα τα σημεία (x,y) αρκούντως κοντά στο M_0 αλλά διάφορα από αυτό. □

Ορισμός: Μια συνάρτηση $z = f(x,y)$ έχει **ελάχιστο** σε ένα σημείο $M_0(x_0,y_0)$ αν

$$f(x_0,y_0) < f(x,y)$$

για όλα τα σημεία (x,y) αρκούντως κοντά στο M_0 αλλά διάφορα από αυτό. □

Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ακρότατα** σημεία.

►**Παράδειγμα:** Βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 - 3.$$

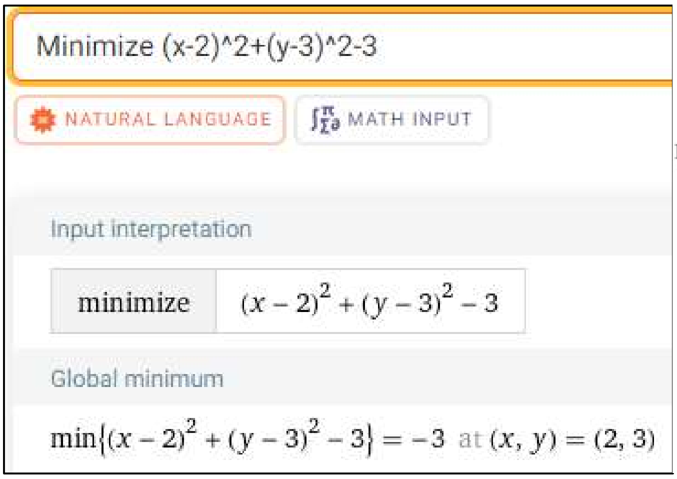
Απάντηση: Είναι φανερό ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο για

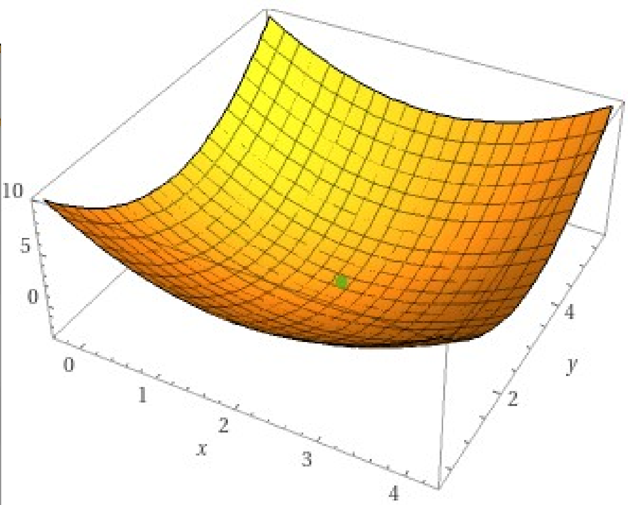
$$x_0 = 2,\ y_0 = 3.$$

Πράγματι οι παραστάσεις $(x-2)^2$ και $(y-3)^2$ είναι πάντα θετικές για $x_0 \neq 2,\ y_0 \neq 3$. Έτσι

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 - 3 \geq -3,$$

που σημαίνει $f(x,y) > f(2,3)$.





◄

► **Παράδειγμα:** Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x + 2$$

Εξετάζουμε αν υπάρχουν ακρότατα σημεία στην συνάρτηση αυτή. Οι πρώτες μερικές παράγωγοι της $f(x,y)$ είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

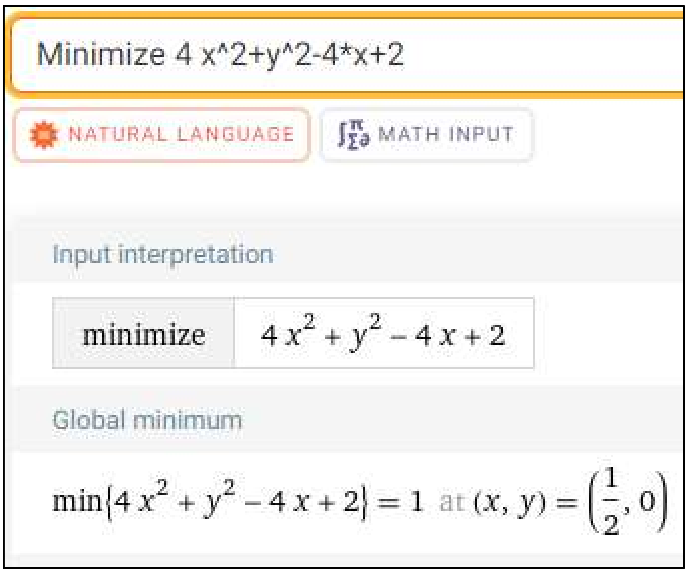
Επομένως επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{matrix} 8x - 4 = 0 \\ 2y = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{matrix}$$

Εξετάζουμε αν το σημείο $\left(\frac{1}{2},0\right)$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x,y) - f\left(\frac{1}{2},0\right) & \\ &= 4x^2 + y^2 - 4x + 2 \\ &- \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} + 2\right] \\ &= (2x-1)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα στο σημείο $\left(\frac{1}{2},0\right)$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. ◀



► **Παράδειγμα:** Η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2 - y^2,$$

έχει μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y,$$

οι οποίες μηδενίζονται για (x_0, y_0)=(0,0).

Είναι όμως φανερό ότι στο σημείο αυτό δεν υπάρχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο σημείο. Πράγματι έχουμε $f(0,0) = 0$, ενώ για ένα οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$ διαπιστώνουμε ότι

$$f(\varepsilon,0) > 0, \qquad f(0,\varepsilon) < 0.$$

Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά στο κρίσιμο σημείο έχουμε θετικές και αρνητικές τιμές. Οπότε αυτό δεν μπορεί να είναι ακρότατο. ◀

Θεώρημα: Όταν μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως τρίτης τάξης σε μια περιοχή του κρίσιμου σημείου $M_0(x_0, y_0)$, τότε

α) η $f(x, y)$ έχει μέγιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

και

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0,$$

β) η $f(x, y)$ έχει ελάχιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

και

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$$

γ) η $f(x, y)$ δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο αν

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$$

δ) δεν μπορούμε να αποφανθούμε και απαιτείται περεταίρω διερεύνηση αν

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0. \square$$

►**Παράδειγμα**: Η συνάρτηση $z = f(x, y) = x^2 - y^2$, έχει μερικές παραγώγους

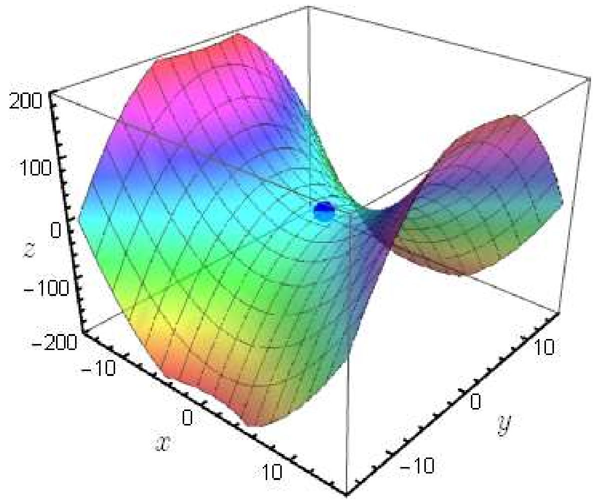
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,$$

οι οποίες μηδενίζονται για (x_0, y_0)=(0,0).

Είναι όμως φανερό ότι στο σημείο αυτό δεν υπάρχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο σημείο. Πράγματι έχουμε $f(0,0) = 0$, ενώ για ένα οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$ διαπιστώνουμε ότι

$$f(\varepsilon, 0) > 0, \ f(0, \varepsilon) < 0.$$

Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά στο κρίσιμο σημείο έχουμε θετικές και αρνητικές τιμές όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Οπότε αυτό δεν μπορεί να είναι ακρότατο. Το σημείο αυτό λέγεται **σαγματικό**.◄



►**Παράδειγμα**: Η συνάρτηση

$$z = f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 5x - 3y + 1,$$

έχει κρίσιμα σημεία που βρίσκονται λύνοντας το γραμμικό σύστημα

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 5 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 3 = 0.$$

Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο της απαλοιφής του Gauss,

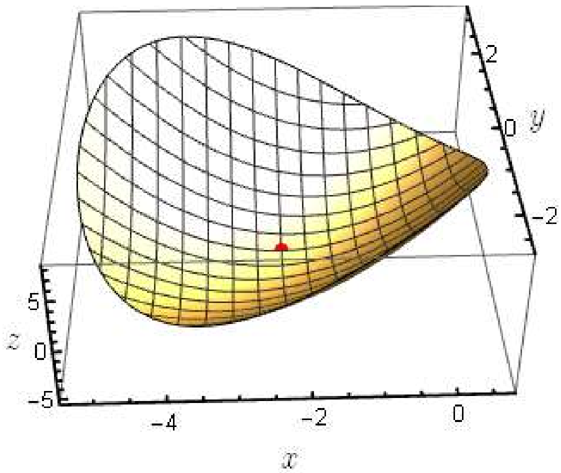
$$2x - y = -5, \quad -x + 2y = 3,$$

ή

$$2x - y = -5,$$

$$-x + \frac{1}{2}\cdot 2x + 2y + \frac{1}{2}\cdot(-y) = 3 + \frac{1}{2}\cdot(-5),$$

ή $2x - y = -5, \quad 0x + 1.5y = 0.5$



Οπότε λαμβάνουμε ως κρίσιμο σημείο

$$x_0 = -\frac{7}{3}, \ y_0 = \frac{1}{3}.$$

Οι μερικές παράγωγοι στο κρίσιμο σημείο είναι

$$P = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = 2$$

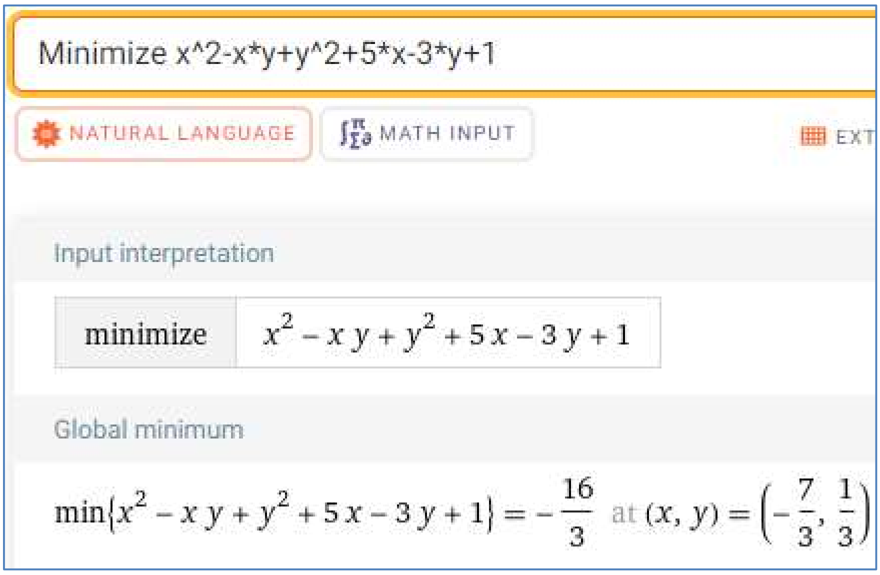
$$Q = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = 2,$$

$$R = \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 = -1.$$

Οπότε από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ότι

$$PQ - R^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 5 > 0,\ P > 0.$$

Επομένως η συνάρτηση έχει ελάχιστο το οποίο είναι $f\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{16}{3}$.



►**Άσκηση**: Βρείτε το μήκος το πλάτος και το ύψος ενός ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου που οι πλευρές του έχουν συνολικά εμβαδό 54 m² και το μέγιστο δυνατό όγκο.

Λύση: Έστω x, y, ω αντίστοιχα το μήκος, πλάτος και ύψος του παραλληλεπίπεδου. Το εμβαδόν των 6 πλευρών είναι

$$2xy + 2x\omega + 2y\omega = 54.$$

Άρα έχουμε $\omega = \frac{27-}{x+y}$. Ο όγκος είναι $V = xy\omega = \frac{xy(27-x\ \ )}{x+y}$.

Οι πρώτες παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(27-x^2-2xy)}{(x+y)^2},\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(27-y^2-2xy)}{(x+y)^2}.$$

Επειδή δεν έχουν νόημα μηδενικά μήκη και πλάτη, θα πρέπει

$$27 - x^2 - 2xy = 0 \ \text{ και } \ 27 - y^2 - 2xy.$$

Το παραπάνω σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων έχει μια πραγματική θετική λύση, $x_0 = 3,\ y_0 = 3$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε και $\omega_0 = 3$. Άρα το ζητούμενο είναι κύβος με ακμή 3m. ◄

►**Άσκηση.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^3 - 6xy + y^3.$$

Βρείτε τα ακρότατα σημεία της.

Λύση:

Η συνάρτηση που δόθηκε έχει κρίσιμα σημεία που βρίσκονται λύνοντας το γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \frac{\partial(x^3-6xy+y^3)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(x^3-6xy+y^3)}{\partial y} = 0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 3y^2 = 0 \end{matrix}\right|$$

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y

$$3x^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow 6y = 3x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2(1)$$

και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση

$$-6x + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow -6x + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = 0.$$

Στη συνέχεια κατά σειρά έχουμε:

$$\frac{3}{4}x^4 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}x(x-2)(x^2+2x+4) = 0,$$

η οποία έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις $x_1 = 0,\ x_2 = 2$.

Λαμβάνοντας υπόψη την (1) καταλήγουμε σε δύο κρίσιμα σημεία. Τα $(0,0),\ (2,2)$.

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της f είναι:

$$P = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(x^3-6xy+y^3)}{\partial x^2} = \frac{\partial(3x^2-6y)}{\partial x} = 6x,$$

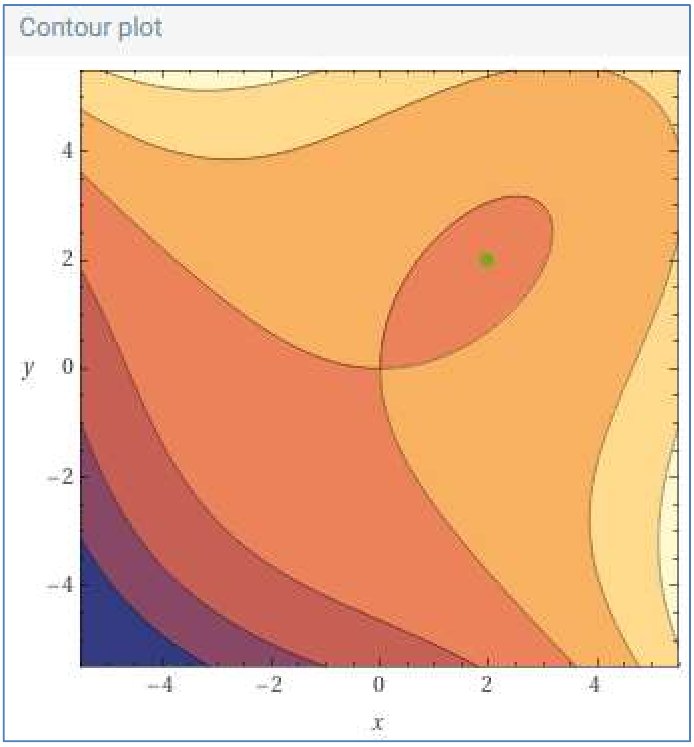
$$Q = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(x^3-6xy+y^3)}{\partial y^2} = \frac{\partial(-6x+3y^2)}{\partial y} = 6y,$$

$$R = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(x^3-6xy+y^3)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(3x^2-6y)}{\partial y} = -6.$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα, βλέπουμε ότι για το πρώτο σημείο $(0,0)$ έχουμε

$$\begin{vmatrix} P & R \\ R & Q \end{vmatrix} = PQ - R^2 = (6\cdot 0)\cdot(6\cdot 0) - (-6)^2 = -36 < 0,$$

άρα η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο.



Για το δεύτερο σημείο έχουμε

$$\begin{vmatrix} P & R \\ R & Q \end{vmatrix} = PQ - R^2$$
$$= (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) - (-6)^2$$
$$= 108 > 0 \quad \text{και} \quad P = 12 > 0.$$

Επομένως η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο για $x_0 = 2, \quad y_0 = 2$ το οποίο είναι $f(2{,}2) = -16$.

Στο σχήμα αριστερά βλέπουμε τις ισοϋψείς της συνάρτησης. Όσο πιο αρνητική γίνεται τόσο πιο σκουρόχρωμη εμφανίζεται. Το τοπικό ελάχιστο εμφανίζεται ως πράσινο σημείο εντός του «τοπικού βυθίσματος» στη θέση (2,2).◀