Άσκηση : Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y,z) = xe^y + zsiny$ στο σημείο $\overrightarrow{a} = (1,0,1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη **διότι** οι μερικές της παράγωγοι

$$f_x(x,y,z) = e^y \quad , \quad f_y(x,y,z) = xe^y + zcosy \quad , \quad f_z(x,y,z) = siny$$

υπάρχουν και είναι συνεχείς. Η κλίση της f είναι
$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z) f_z(x,y,z)) = (e^y, xe^y + zcosy, siny)$
η οποία παίρνει στο σημείο $(1,0,1)$ την τιμή $\nabla f(1,0,1) = (1,2,0)$.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ δεν είναι μοναδιαίο (δηλαδή $||u|| \neq 1$) επομένως θέλουμε να βρούμε την κατεύθυνσή του ώστε να βρούμε έπειτα την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο (1,0,1) ως προς την κατεύθυνση του $\overrightarrow{u}$. Επομένως η ζητούμενη κατεύθυνση (δηλαδή το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα) είναι η

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Επομένως από το Θεώρημα υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο (1,0,1) ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ (δηλαδή ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{w} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0))$ και δίνεται από τον τύπο

$$f_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(1,0,1) \cdot \overrightarrow{w} = (1,2,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 1\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \ .$$