Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

1. Βασικές έννοιες.

Το σύνολο

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ φορές}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}, \; n \in \mathbb{N}$$

ονομάζεται ευκλείδειος χώρος διάστασης n. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ είναι διατεταγμένες n-άδες, συμβολίζονται

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{ή} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

και λέγονται διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Οι πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{x}$.

Για $n = 2$,

$$\vec{x} = (x_1, x_2) \quad \text{ή} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή τα γνωστά διανύσματα του επιπέδου (χώρος $\mathbb{R}^2$).

Για $n = 3$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{ή} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

είναι διανύσματα στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 (x_1 : τετμημένη, x_2 = τεταγμένη, x_3 = κατηγμένη).

Η ισότητα και οι πράξεις των διανυσμάτων είναι

μια απλή επέκταση των γνωστών εννοιών από τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$. Συγκεκριμένα
Έστω $\vec{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ στοιχεία του $\mathbb{R}^n$. Τότε ορίζουμε:

<u>Ισότητα:</u> $\vec{x}=\vec{y} \Longleftrightarrow x_1=y_1, x_2=y_2, \dots, x_n=y_n$

<u>Πρόσθεση:</u> $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

<u>Αριθμητικός πολλαπλασιασμός:</u> $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \lambda\in\mathbb{R}$

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$
$\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$,
$\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$
$-\vec{x}:=(-1)\vec{x}=(-x_1, \dots, -x_n)$

$\lambda, \mu\in\mathbb{R}$
$\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$
$\lambda(\mu\vec{x})=(\lambda\mu)\vec{x}$
$1\vec{x}=\vec{x}$
$(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$

<u>Εσωτερικό γινόμενο:</u> $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$
με ιδιότητες:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$$

$$\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$$

$$\vec{0}\cdot\vec{x}=0, \text{ όπου } \vec{0}=(0,0,\dots,0)$$

<u>Μέτρο ή Ευκλείδεια νόρμα:</u> $\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$

και ισχύει: $\|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ (τριγωνική ιδ.)

<u>Απόσταση δύο στοιχείων:</u> $d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

<u>Μοναδιαίο διάνυσμα:</u> $\|\vec{x}\|=1$

Αν $\vec{y}\in\mathbb{R}^n, \vec{y}\neq\vec{0}$, τότε $\dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$: μοναδιαίο.

$\left(\left\|\dfrac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right\|=\dfrac{\|\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|}=1\right)$

<u>Γωνία δύο διανυσμάτων:</u> $\cos\theta=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$

Αναπαράσταση διανύσματος

1. Αν θεωρήσουμε τα μοναδιαία διανύσματα (βάση)

$$\vec{e}_1 = (1,0,0,\dots,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ \vec{e}_n = (0,0,0,\dots,1)$$

τότε το διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ γράφεται

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$$

Ειδικότερα στον $\mathbb{R}^3$, πολλές φορές συμβολίζουμε

$$\vec{e}_1 = \vec{i},\quad \vec{e}_2 = \vec{j},\quad \vec{e}_3 = \vec{k}$$

Εξωτερικό γινόμενο

Στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται το εξωτερικό γινόμενο για τα διανύσματα $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$, ορίζουμε

$$\vec{x}\times\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + $$

$$+ (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι

γενικά $\vec{x}\times\vec{y} \neq \vec{y}\times\vec{x}$

~~Ιδιότ.~~ $\vec{x}\times\vec{x} = \vec{0}$

$\vec{x}\times\vec{y} = -(\vec{y}\times\vec{x})$

$(\lambda\vec{x})\times\vec{y} = \lambda(\vec{x}\times\vec{y}) = \vec{x}\times(\lambda\vec{y})$

$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z}) = \vec{x}\times\vec{y} + \vec{x}\times\vec{z}$

$(\vec{x}+\vec{y})\times\vec{z} = \vec{x}\times\vec{z} + \vec{y}\times\vec{z}$

$\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}$

$\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x}\cdot\vec{z})\vec{y} - (\vec{x}\cdot\vec{y})\vec{z}$