

Αντίστροφος πίνακας 2×2

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Αν η ορίζουσα του A είναι διάφορη του μηδέν, δηλαδή

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0,$$

τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος πίνακας του A δίνεται από τον τύπο:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Παράδειγμα:

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος διότι $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$.

Ο αντίστροφος του A λοιπόν είναι ο πίνακας $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Άσκηση

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης

$$f(x, y) = \sin \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right)$$

Λύση

$$f_x(x, y) = \cos \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = \cos \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) \frac{3 + 2x}{1 - y}$$
$$f_y(x, y) = \cos \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = \cos \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2}$$

αφού

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = (3x + x^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{1 - y} \right) = (3x + x^2) \left(-\frac{1}{(1 - y)^2} \right) (-1) = \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2}$$