Επιφανειακά ολοκληρώματα

Για μία C^1 διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ορίζουμε τα διανύσματα :

$$\overrightarrow{r_u} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right)$$

$$\overrightarrow{r_v} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right)$$

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}(u,v) := (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u,v) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ορισμοί:

Μία διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} = (x,y,z) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ονομάζεται

$i)$ **απλή** όταν είναι $1-1$ στο εσωτερικό του D.

$ii)$ **λεία** όταν είναι C^1 και ισχύει $\overrightarrow{N}(u,v) = (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}) \neq \overrightarrow{0}$ στο εσωτερικό του D.

$iii)$ **κανονική** όταν είναι απλή και λεία.

Ορισμοί:

$i)$ **Παραμετρική επιφάνεια** S του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, όταν υπάρχει μία διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η οποία έχει πεδίο τιμών το σύνολο S, δηλαδή $S = \overrightarrow{r}(D) = \{\overrightarrow{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$.

$ii)$ **Κανονικό κάθετο διάνυσμα** της παραμετρικής επιφάνειας $S = S(\overrightarrow{r})$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) ονομάζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{N}(u_0, v_0) = (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u_0, v_0)$, όπου $(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{r}(u_0, v_0)$.

$iii)$ **Εφαπτόμενο επίπεδο** της παραμετρικής επιφάνειας $S = S(\overrightarrow{r})$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) ονομάζεται το επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ το οποίο περιέχει το σημείο $\overrightarrow{r}(u_0, v_0)$ της επιφάνειας S και είναι κάθετο προς το διάνυσμα $\overrightarrow{N}(u_0, v_0) = (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u_0, v_0)$.

Ορισμός : Εμβαδόν παραμετρικής επιφάνειας

Έστω $S = S(\overrightarrow{r})$ μία κανονική παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο μία κανονική διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r}(u,v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (για D u-απλό ή v-απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$). Τότε το **εμβαδόν** της παραμετρικής επιφάνειας $S = S(\overrightarrow{r})$ ορίζεται το διπλό ολοκλήρωμα

$$A(S) := \int\int_D ||\overrightarrow{N}(u,v)||dudv = \int\int_D ||(\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u,v)||dudv$$

Ορισμός: Βαθμωτό επιφανειακό ολοκλήρωμα (αλλιώς επιφανειακό ολοκλήρωμα πρώτου είδους)

Έστω $S = S(\overrightarrow{r})$ μία κανονική παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο μία κανονική διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $f : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής βαθμωτή συνάρτηση. Τότε ως **βαθμωτό επιφανειακό ολοκλήρωμα** της f πάνω στην επιφάνεια S ορίζεται το διπλό ολοκλήρωμα :

$$\begin{aligned}\int\int_S f\,dS &:= \int\int_D f(\overrightarrow{r}(u,v))||\overrightarrow{N}(u,v)||dudv \\ &= \int\int_D f(\overrightarrow{r}(u,v))||(\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u,v)||dudv\end{aligned}$$

όπου $\overrightarrow{N} := \overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}$ το κανονικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S.

Ορισμός: Διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα (αλλιώς επιφανειακό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους)

Έστω $S = S(\overrightarrow{r})$ μία κανονική παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο μία κανονική διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $\overrightarrow{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία συνεχής διανυσματική συνάρτηση. Τότε ως **διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα** της $\overrightarrow{F}$ πάνω στην επιφάνεια S ορίζεται το διπλό ολοκλήρωμα :

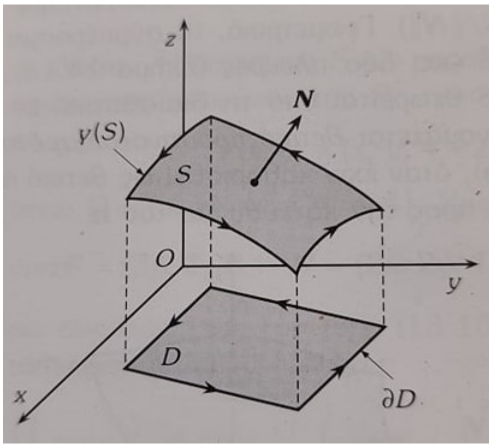
$$\begin{aligned}\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot dS &:= \int\int_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot \overrightarrow{N}(u,v)dudv \\ &= \int\int_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u,v)dudv\end{aligned}$$

όπου $\overrightarrow{N}$ το κανονικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S.

Θεωρήματα *Stokes* και *Gauss*

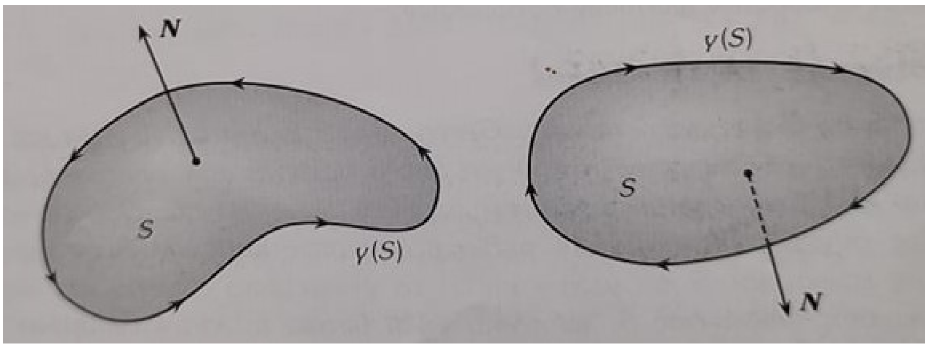
Έστω μία παραμετρική επιφάνεια $S = S(\overrightarrow{r})$ που ορίζεται από τη διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r}(u,v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Ορισμός: Γεωμετρικό σύνορο της παραμετρικής επιφάνειας S ορίζεται η καμπύλη $\gamma(S) := \overrightarrow{r}(\partial D)$, όπου ∂D το σύνορο του συνόλου D.



Σχήμα: Γεωμετρικό σύνορο

Το γεωμετρικό σύνορο $\gamma(S)$ λέμε ότι είναι θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, όταν έχουμε καθορίσει σαν προσανατολισμό της τη φορά κίνησης ενός ατόμου το οποίο κινούμενο κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(S)$ έτσι ώστε το κεφάλι του να δείχνει την κατεύθυνση του $\overrightarrow{N}$, έχει την επιφάνεια S στα αριστερά του.
(Σχόλιο: $\overrightarrow{N}$ κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια και $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{N}/\|\overrightarrow{N}\|$ μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια).



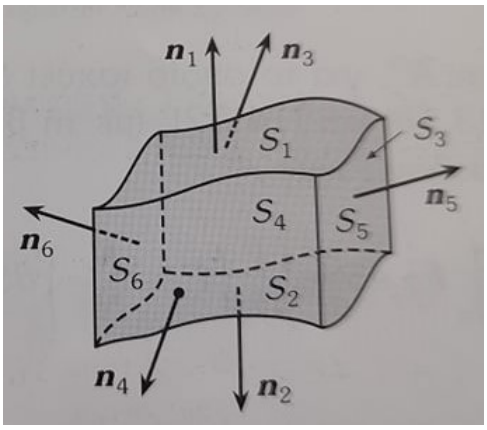
Σχήμα: Προσανατολισμός γεωμετρικού συνόρου

Θεώρημα *Stokes*: Έστω D ένα απλό σύνολο *Green*, $S = S(\overrightarrow{r})$ μία απλή, λεία και C^2 παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την (απλή, λεία και C^2) διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r}(u,v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Έστω επίσης, $\overrightarrow{n} : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων της επιφάνειας S και $\gamma(S) = \overrightarrow{r}(\partial D)$ το γεωμετρικό σύνορο της παραμετρικής επιφάνειας S, το οποίο είναι θετικά προσανατολισμένο ως προς το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{n}$. Τότε για κάθε C^1 διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P, Q, R) : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισχύει ο τύπος *Stokes*:

$$\int_{\gamma(S)} F \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S ((\nabla \times F) \cdot \overrightarrow{n})\, dS$$

Το Θεώρημα *Stokes* συσχετίζει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος μίας καμπύλης γ του $\mathbb{R}^3$ με ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω σε μία προσανατολισμένη επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$, της οποίας το γεωμετρικό σύνορο είναι η καμπύλη γ.

Ορισμός: Ένα φραγμένο υποσύνολο D του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται **κανονικό σύνολο με τμηματικά** C^1 **σύνορο**, όταν το σύνορο ∂D εκφράζεται ως ένωση $\partial D = \bigcup_{j=1}^{k} S_j$, όπου κάθε S_j είναι απλή, λεία παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ και ανά δύο οι επιφάνειες S_j δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. (Γράφεται και ως $\partial D = S_1 + S_2 + ... + S_k$).
Για κάθε $j = 1, 2, ..., k$, ορίζεται το συνεχές διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{n_j}(x, y, z) : S_j \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ των εξωτερικών μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων της επιφάνειας S_j, το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό της κλειστής επιφάνειας ∂D.



Σχήμα: Κανονικό σύνολο με τμηματικά C^1 σύνορο

Θεώρημα *Gauss* (ή Θεώρημα Απόκλισης): Έστω D ένα κανονικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ με τμηματικά C^1 σύνορο ∂D. Έστω επίσης, $\overrightarrow{n_j}(x,y,z) : S_j \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ το συνεχές διανυσματικό πεδίο των εξωτερικών μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων της επιφάνειας S_j, $j = 1, 2, ..., k$ και $\overrightarrow{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Τότε ισχύει ο τύπος *Gauss*:

$$\iint_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_{D} \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dV \ .$$

Το Θεώρημα *Gauss* συσχετίζει το διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα επάνω σε μία κλειστή επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με ένα τριπλό ολοκλήρωμα στο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ το οποίο περιβάλλεται από την επιφάνεια.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογιστεί το διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S (x, y-x, yz)\cdot dS$ με S τον κώνο που δίνεται από τη διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $= (u\cos v, u\sin v, u)\,,\ (u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi]$.

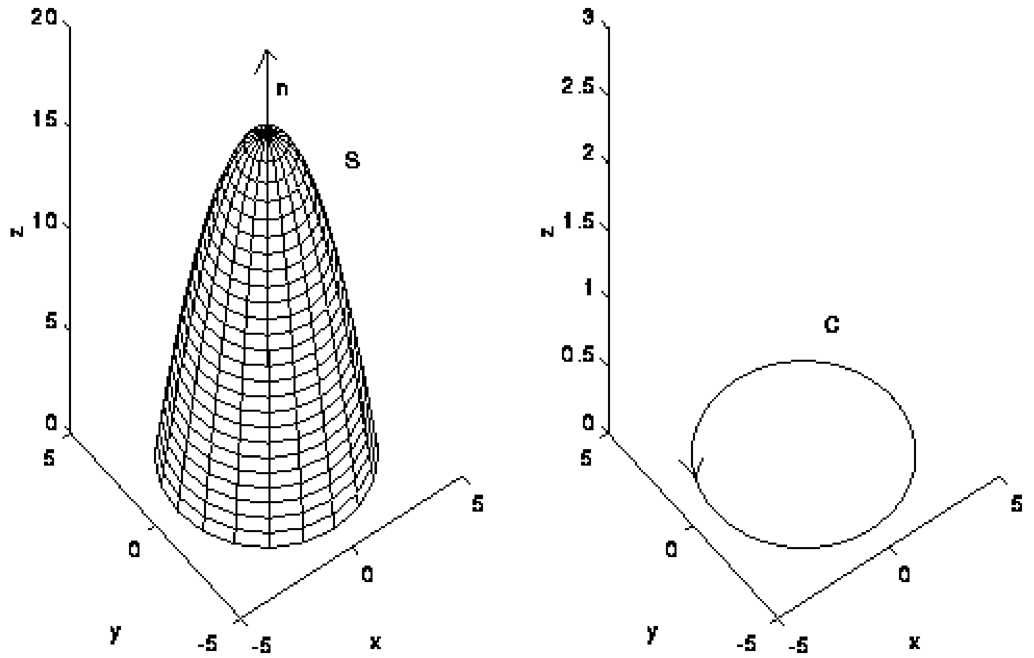
ΛΥΣΗ: Το διάνυσμα $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}$ είναι $\overrightarrow{N} = (-u\cos v, -u\sin v, u)$, επομένως το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται από :

$$
\begin{aligned}
&\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot dS = \int\int_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v))\cdot\overrightarrow{N}(u,v)dudv\\
&\Rightarrow \int\int_S (x, y-x, yz)\cdot dS\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}(x(u,v), y(u,v)-x(u,v), y(u,v)z(u,v))\cdot\overrightarrow{N}(u,v)dudv\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}(u\cos v, u(\sin v-\cos v), u^2\sin v)\cdot(-u\cos v, -u\sin v, u)\,dudv\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}(-u^2+u^2\sin v\cos v+u^3\sin v)\,dudv\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1(-u^2+u^2\sin v\cos v+u^3\sin v)\,dvdu\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1(-1+\sin v\cos v)+\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1\sin v\right)\,dv\\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sin v\cos v+\frac{1}{4}\sin v\\
&= -\frac{1}{3}[v]_0^{2\pi}+\frac{1}{3}\left[\frac{sin^2 v}{2}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{4}[\cos v]_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα $Fubini$ αλλαγής σειράς ολοκλήρωσης).

Άσκηση 2. Επαληθεύστε το θεώρημα του $Stokes$ για την επιφάνεια S ενός παραβολοειδούς $z = 16 - x^2 - y^2$, για $z \geqslant 0$ και για το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$.

Λύση:



Από το θεώρημα του $Stokes$ έχουμε:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS \ ,$$

θεωρώντας ότι η καμπύλη C είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{\hat{n}}$. Για να επαληθεύσουμε το θεώρημα θα υπολογίσουμε ξεχωριστά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (αριστερό μέλος) και ξεχωριστά το επιφανειακό ολοκλήρωμα (δεξί μέλος) και θα δούμε αν αυτά είναι ίσα.

• (Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα):
Απαλοίφοντας το z με την επιφάνεια $z = 0$ προκύπτει ότι το σύνορο του D που είναι η ορθή προβολή του στερεού θα είναι $x^2 + y^2 = 16$. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε την παραμέτρηση

$$\overrightarrow{r}(\theta) = (4cos\theta, 4sin\theta, 0) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \ , \ \ \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \cdot \overrightarrow{r}'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (12sin\theta, 0, -24cos\theta) \cdot (-4sin\theta, 4cos\theta, 0) d\theta \\ &= -48 \int_0^{2\pi} sin^2(\theta) d\theta = -48 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = -48\pi \ . \end{aligned}$$

• (Επιφανειακό ολοκλήρωμα):
Αρχικά υπολογίζουμε το $curl\overrightarrow{F}$, όπου $\overrightarrow{F} = (3y, 4z, -6x)$, το οποίο είναι:

$$curl\overrightarrow{F} \equiv \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = (-4, 6, -3)$$

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα. Αν θεωρήσουμε την $g(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 16 = 0$, το κάθετο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση:

$$\overrightarrow{N} = \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 1) \ .$$

Άρα έχουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \iint_S curl\overrightarrow{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_S (-4, 6, -3) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS &= \iint_D (-4, 6, -3) \cdot \overrightarrow{N} dxdy \\ &= \iint_D (-8x + 12y - 3) dxdy \ . \end{aligned}$$

Μένει να υπολογίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης των x και y τα οποία ανήκουν στον δίσκο $D = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 16\big\}$. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες έχουμε:

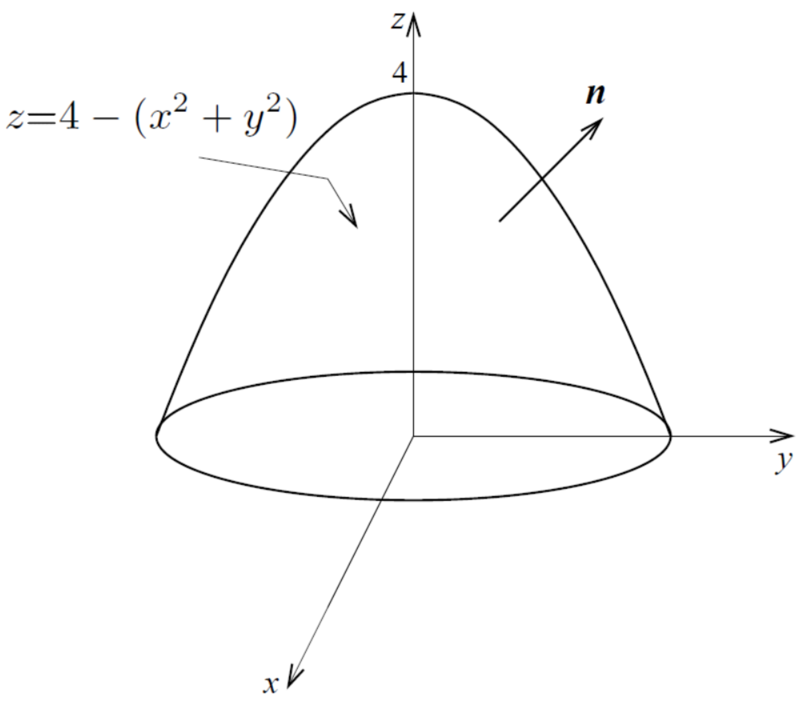
$$0 \leqslant r \leqslant 4 \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \ .$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\iint_D (-8x + 12y - 3)dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (-8rcos\theta + 12rsin\theta - 3)rdrd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^4 (-8r^2cos\theta + 12r^2sin\theta - 3r)drd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{8}{3}r^3cos\theta + 4r^3sin\theta - \frac{3}{2}r^2\right]_0^4 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\frac{512}{3}cos\theta + 256sin\theta - 24)d\theta = -48\pi \ .$$

Άσκηση 3. Έστω S η επιφάνεια που αποτελείται απο το παραβολοειδές $z = 4 - x^2 - y^2$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $z = 4$ και η οποία είναι προσανατολι-σμένη ώστε το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα να δείχνει προς τα πάνω.
α) Να δείχθεί ότι η παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(u,v) = (ucosv, usinv, 4 - u^2)$ όπου $0 \leqslant u \leqslant 2$ και $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ διατηρεί τον προσανατολισμό.
β) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $(1,1,2)$.
γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν της S.
δ) Να βρεθεί ο ρυθμός ροής του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, -x, 3)$ δια μέσου της S.

Λύση:



α) Αφού δίνεται η παραμέτρηση αρκεί να υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ και να δείξουμε ότι δείχνει προς τα πάνω.

$$\overrightarrow{r}_u = (cosv, sinv, -2u)$$
$$\overrightarrow{r}_v = (-usinv, ucosv, 0)$$
$$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = (2u^2cosv, 2u^2sinv, u)$$

Επειδή λοιπόν έχουμε ότι $u \geqslant 0$ έπεται ότι το $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ έχει φορά προς τα πάνω. Άρα η παραμετρικοποίηση διατηρεί τον προσανατολισμό.

β) Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο $(1,1,2)$ δίνεται από την εξίσωση:

$$(x-1, y-1, z-2) \cdot \overrightarrow{N} \ ,$$

όπου $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Έχουμε ότι $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = (2u^2 cosv, 2u^2 sinv, u) = u(2ucosv, 2usinv, 1) = u(2x, 2y, 1)$. Άρα στο σημείο $(1,1,2)$ ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $(2,2,1)$.Επομένως η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(1,1,2)$ είναι:

$$2(x-1) + 2(y-1) + 1(z-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y + z - 6 = 0 \ .$$

γ) Για το εμβαδόν χρησιμοποιούμε τον τύπο με την παραμέτρηση:

$$A(S) = \int_S dS = \int_D \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| dudv \ ,$$

όπου D το πεδίο ορισμού της παραμέτρησης. Άρα:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{1+4u^2} dudv = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4u^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1) \ .$$

δ) Ο ρυθμός ροής του $\overrightarrow{F}$ δια μέσου της S δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$$

Αφού έχουμε την παραμέτρηση της S θα χρησιμοποιπήσουμε την ισοδύναμη μορφή του παραπάνω ολοκληρώματος:

$$\iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) dudv$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (usinv, -ucosv, 3) \cdot (2u^2 cosv, 2u^2 sinv, u) dudv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2u^3 sinvcosv - 2u^3 sinvcosv + 3u) dudv$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3ududv = \int_0^2 3u[v]_0^{2\pi} du = 6\pi \int_0^2 udu$$
$$= 6\pi \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = 12\pi \ .$$