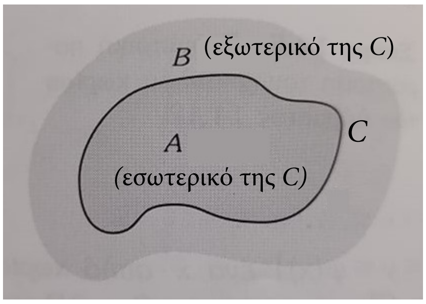
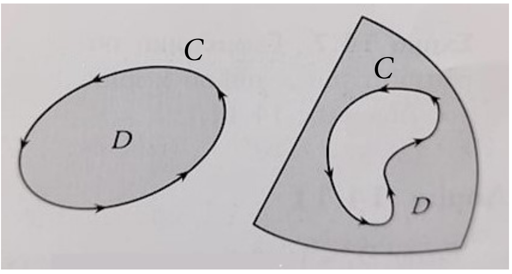
Θεώρημα *Green*

Ορισμός: Μία απλή, κλειστή και συνεχής καμπύλη $C = C(\overrightarrow{r})$ του $\mathbb{R}^2$, η οποία ορίζεται από την (απλή, κλειστή και συνεχή) παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **καμπύλη** *Jordan* του $\mathbb{R}^2$.

Το συμπλήρωμα $C^c = \mathbb{R}^2 \setminus C$ είναι η ένωση $A \cup B$ ενός φραγμένου A και ενός μη φραγμένου B υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$. Το σύνολο A ονομάζεται εσωτερικό και το σύνολο B ονομάζεται εξωτερικό της καμπύλης C.



Έστω $C = C(\overrightarrow{r})$ μία **προσανατολισμένη καμπύλη** *Jordan* και D ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με $C \subseteq \partial D$ (δηλαδή η καμπύλη C είναι το σύνορο ή τμήμα του συνόρου του D). Τότε λέμε ότι η καμπύλη C είναι θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) προσανατολισμένη ως προς το σύνολο D και συμβολίζεται με C^+ (αντίστοιχα C^-), όταν ο προσανατολισμός της συμπίπτει με τη φορά κίνησης ενός ατόμου που περπατάει κατά μήκος της καμπύλης C έτσι ώστε το σύνολο D να βρίσκεται αριστερά του (αντίστοιχα δεξιά του). Στο Σχήμα (α) φαίνεται μία θετικά προσανατολισμένη και στο σχήμα (β) μία αρνητικά προσανατολισμένη καμπύλη C.



(a) $\qquad$ (b)

Θεώρημα *Green*: Έστω D ένα απλό χωρίο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο εκφράζεται ως

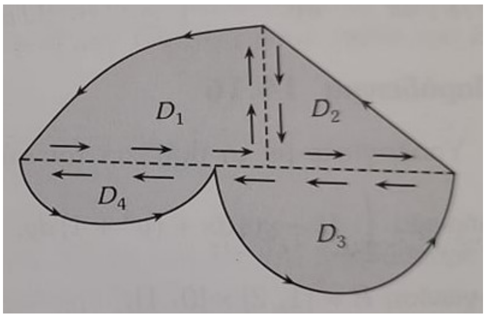
$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) : a \le x \le b\,,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\} \\ &= \{(x,y) : c \le y \le d\,,\ g_1(y) \le x \le g_2(y)\}\ , \end{aligned}$$

όπου $f_1,\ f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $g_1,\ g_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις και $C = \partial D$ το σύνορο του χωρίου D. Επίσης, έστω $\overrightarrow{F} = (P,Q) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Τότε ισχύει ο τύπος του *Green*:

$$\int_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \equiv \int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\ .$$

Το Θεώρημα *Green* λοιπόν, συσχετίζει ένα διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μίας κλειστής παραμετρικής καμπύλης C του $\mathbb{R}^2$ με ένα διπλό ολοκλήρωμα επάνω στο χωρίο D του $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός: Ένα φραγμένο υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται **απλό σύνολο** *Green* όταν το σύνορό του είναι μία τμηματικά C^1 καμπύλη *Jordan* του $\mathbb{R}^2$.



Σχήμα: Απλό σύνολο *Green*, όπου $D = \bigcup_{j=1}^{4} D_j$

Σχόλιο: Κάθε απλό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$, του οποίου το σύνορο ∂D είναι μία τμηματικά C^1 καμπύλη, είναι απλό σύνολο *Green*.

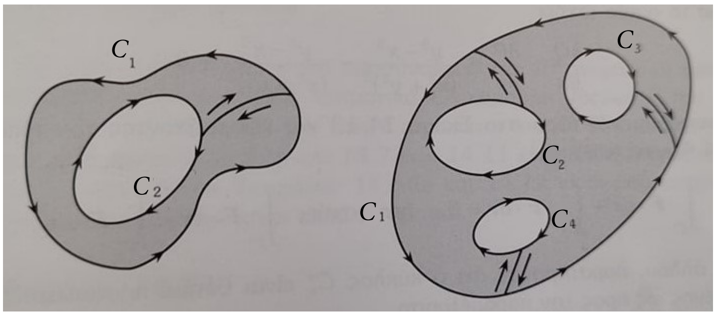
Σχόλιο: Ο τύπος του *Green* επεκτείνεται και στις περιπτώσεις απλών συνόλων *Green*.

Ορισμός: Ένα φραγμένο υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται **στοιχειώδες σύνολο** *Green* όταν υπάρχουν τμηματικά C^1 καμπύλες *Jordan* C_1, C_2, ..., C_k του $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε να ισχύει $\partial D = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$.

Στην περίπτωση ενός στοιχειώδους συνόλου *Green* D, για ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P, Q) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ο τύπος του *Green* γράφεται ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{C_j} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \ ,$$

όπου η καμπύλη *Jordan* C_j είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το σύνολο D.



Σχήμα: Στοιχειώδη σύνολα *Green*

Ορισμός: Ένα παραμετρικά συνεκτικό υποσύνολο D του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται **απλά συνεκτικό** όταν για κάθε τμηματικά C^1 καμπύλη *Jordan* C του D ισχύει ότι το εσωτερικό της C περιέχεται στο D.

Θεώρημα: Έστω D ένα ανοικτό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $\overrightarrow{F} = (P, Q) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Το διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\overrightarrow{F}$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης ολοκλήρωσης στο D.

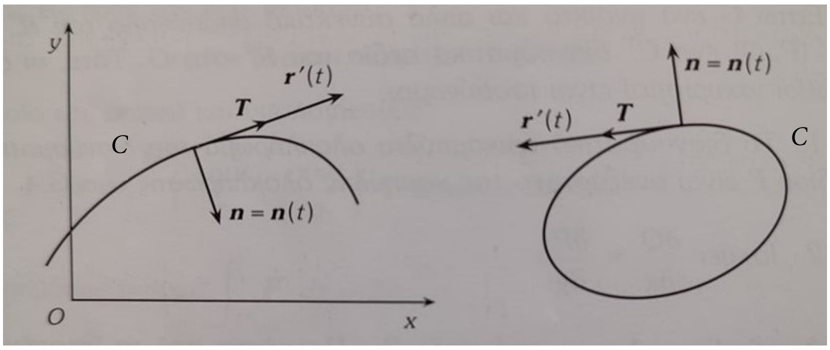
2) Ισχύει $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Ορισμός: Έστω $C = C(\overrightarrow{r})$ μία λεία παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^2$, που ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. Τότε **μοναδιαίο κανονικό κάθετο διάνυσμα της καμπύλης** C **στο σημείο** $\overrightarrow{r}(t)$ ονομάζεται το διάνυσμα που δίνεται από τον τύπο:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}(t) = \frac{1}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}\,(y'(t)\,, -x'(t)) \ ,$$

το οποίο είναι κάθετο στο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{r'(t)}}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}$ της καμπύλης C στο σημειο $\overrightarrow{r}(t)$.

Σχόλιο: Όταν η καμπύλη είναι επιπλέον καμπύλη *Jordan* θετικά προσανατολισμένη (ως προς τη παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t)$, τότε η φορά του $\overrightarrow{n}$ είναι ως προς το εξωτερικό της καμπύλης C.



Σχήμα: μοναδιαίο κανονικό κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{n}$ της καμπύλης C

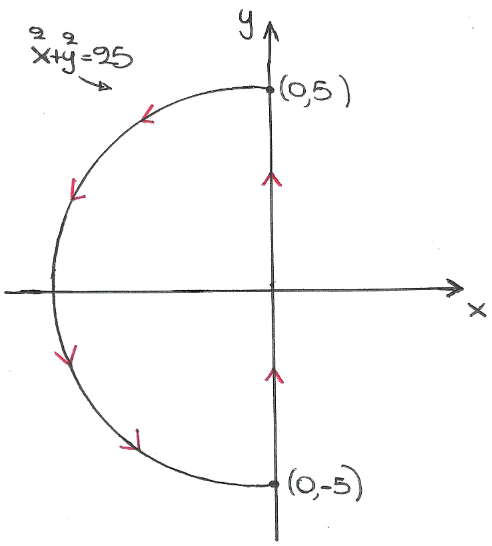
Θεώρημα *Gauss* (ή Θεώρημα Απόκλισης) στο επίπεδο: Έστω D ένα απλό σύνολο *Green* στο $\mathbb{R}^2$ του οποίου το σύνορο ∂D είναι μία λεία παραμετρική καμπύλη *Jordan* $C = C(\overrightarrow{r})$ θετικά προσανατολισμένη ως προς τη παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ και $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}(t)$ το μοναδιαίο κανονικό κάθετο διάνυσμα της C. Επίσης, έστω $\overrightarrow{F} = (P, Q) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Τότε ισχύει ο τύπος:

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, ds = \iint_D \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dxdy \ .$$

Εφαρμογές του Θεωρήματος *Green*

1. Να υπολογισθεί με χρήση του θεωρήματος του *Green* το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C yx^2dx - x^2dy$, όπου C η καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα

Λύση



Όπως φαίνεται από το σχήμα, το χωρίο D είναι απλό και συνεκτικό και το σύνορο του C είναι κατα τμήματα C^1 καμπύλη και θετικά προσανατολισμένη καθώς έχει το D στα αριστερά της. Επιπλέον αν ορίσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (yx^2, -x^2) \;\Rightarrow\; P = yx^2 \;, \quad Q = -x^2 \;,$$

παρατηρούμε ότι είναι C^1 στο χωρίο D. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του *Green* προκύπτει ότι

$$\int_{C=\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$\Rightarrow \int_C yx^2dx - x^2dy = \iint_D -2x - x^2dxdy \;,$$

όπου D το χωρίο που περιβάλλεται από την καμπύλη C.
Καθώς το χωρίο D είναι το ημικύκλιο, η χρήση πολικών συντεταγμένων θα διευκολύνει τον υπολογισμό

$$x = rcos\theta \;, \quad y = rsin\theta \;, \quad x^2 + y^2 = r^2 \;, \quad J = r \;.$$

Μένει λοιπόν να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης.
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το χωρίο D είναι το ημικύκλιο $x^2+y^2=25$ του 2ου και 3ου τεταρτημορίου. Αυτό σημαίνει ότι

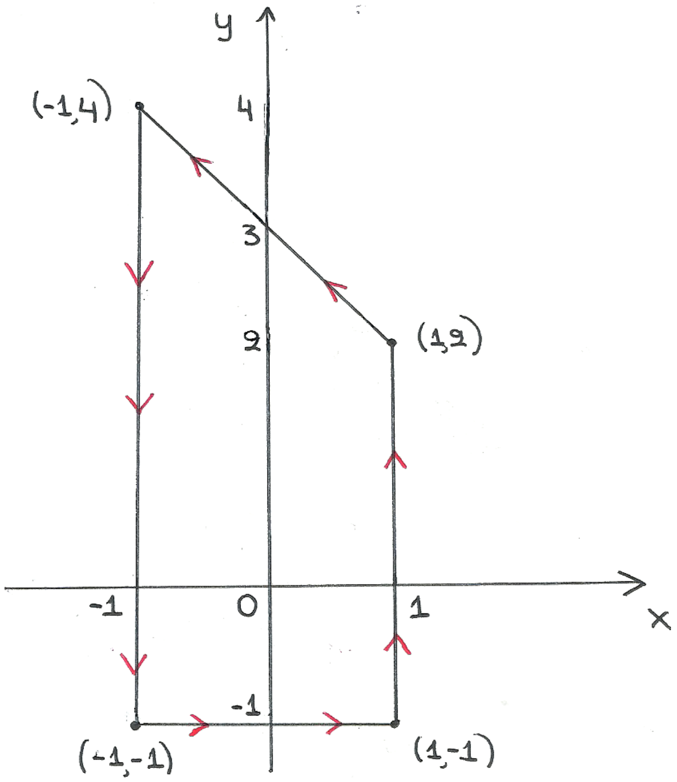
$$\frac{1}{2}\pi \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}\pi \ , \quad 0 \leqslant r \leqslant 5 \ .$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\int_C yx^2dx - x^2dy = \iint_D -2x - x^2dxdy \\
&= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int_0^5 r\left(-2rcos\theta - r^2cos^2\theta\right)drd\theta \\
&= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int_0^5 \left(-2r^2cos\theta - \frac{1}{2}r^3(1+cos(2\theta))\right)drd\theta \\
&= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left[-\frac{2}{3}r^3cos\theta - \frac{1}{8}r^4(1+cos(2\theta))\right]_0^5 d\theta \\
&= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(-\frac{250}{3}cos\theta - \frac{625}{8}(1+cos(2\theta))\right)d\theta \\
&= \left[-\frac{250}{3}sin\theta - \frac{625}{8}(\theta + \frac{1}{2}sin(2\theta))\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = \ ...
\end{aligned}$$

2. Να υπολογισθεί με χρήση του θεωρήματος του *Green* το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C (6y - 9x)dy - (yx - x^3)dx$, όπου C η καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση



Παρατηρούμε άμεσα από το σχήμα ότι η καμπύλη C είναι μία κλειστή κατα τμήματα C^1 η οποία αποτελεί σύνορο του απλά συνεκτικού D και είναι θετικά προσανατολισμένη καθώς έχει το χωρίο D στα αριστερά της. Επιπλέον αν ορίσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \big(-(yx - x^3), 6y - 9x\big) \;\Rightarrow P = -(yx - x^3)\ , \quad Q = 6y - 9x\ ,$$

παρατηρούμε ότι είναι C^1 στο D.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -9 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x\ .$$

Επομένως εφαρμόζουμε το θεώρημα του *Green*:

$$\int_{C=\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\Rightarrow \int_C (6y - 9x)dy - (yx - x^3)dx = \iint_D (x - 9)dxdy\ .$$

Μένει λοιπόν να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Από το σχήμα φαίνεται άμεσα ότι αυτά θα είναι:

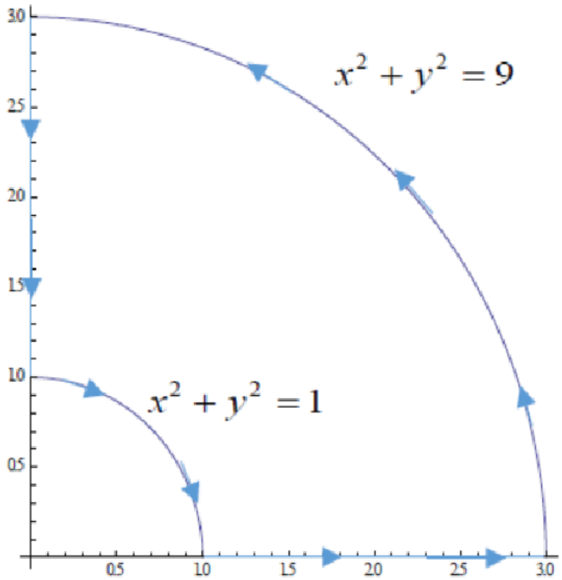
$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{και} \quad -1 \leqslant y \leqslant 3-x \ ,$$

όπου η ευθεία βρέθηκε χρησιμοποιώντας τα δύο σημεία $(x_1, y_1) = (-1, 4)$, $(x_2, y_2) = (1, 2)$ και την εξίσωση της ευθείας στο επίπεδο $y - y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_{1,2})$. Άρα:

$$\begin{aligned}
&\int_{C=\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy \\
\Rightarrow\ &\int_C (6y - 9x) dy - (yx - x^3) dx \\
&\qquad = \iint_D (x-9) dx dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{3-x} (x-9) dy dx \\
&\qquad = \int_{-1}^{1} [(x-9)y]_{-1}^{3-x} dx = \int_{-1}^{1} (x-9)(4-x) dx \\
&\qquad = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 36x\right]_{-1}^{1}
\end{aligned}$$

3. Να υπολογισθεί με χρήση του θεωρήματος του *Green* το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C (e^x + 2xy)dx + (4x^2 + siny)dy$, όπου C η καμπύλη που περιβάλλει το χωρίο $D = \left\{(x, y) : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\right\}$ στο 1ο τεταρτημόριο.

Λύση



Από το σχήμα φαίνεται ότι το χωρίο D είναι απλά συνεκτικό (δεν έχει τρύπες) και έχει ως σύνορο την θετικά προσανατολισμένη καμπύλη C η οποία είναι κατά τμήματα C^1, απλή (δεν τέμνει τον εαυτό της) και κλειστή. Επιπλέον το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x, y) = (e^x + 2xy, 4x^2 + siny)$ είναι C^1 στο D. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του *Green* στο $\partial D = C$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 8x \ .$$

Άρα:

$$\int_{C=\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\Rightarrow \int_C (e^x + 2xy)dx + (4x^2 + siny)dy = \iint_D (8x - 2x)dxdy = \iint_D 6xdxdy \ .$$

Μένει λοιπόν να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης των x και y. αφού βρισκόμαστε σε δακτύλιο (αναμεσα σε δύο κύκλους), όπως και στον δίσκο θα διευκολύνει αρκετά η χρήση πολικών συντεταγμένων.

$$x = rcos\theta \ , \quad y = rsin\theta \ , \quad x^2 + y^2 = r^2 \ , \quad J = r \ .$$

Για τα άκρα ολοκλήρωσης έχουμε

$$\bullet\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9 \;\Rightarrow\; 1 \leqslant r^2 \leqslant 9 \;\Rightarrow\; 1 \leqslant r \leqslant 3 \,.$$

$$\bullet\, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (1\text{ο τεταρτημόριο}) \,.$$

Επομένως:

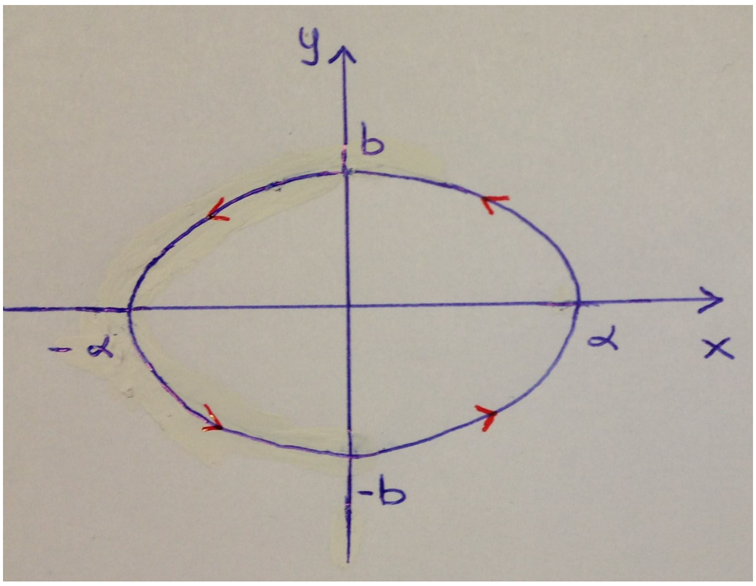
$$\int_C (e^x + 2xy)dx + (4x^2 + siny)dy = \iint_D (8x - 2x)dxdy = \iint_D 6xdxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 6rcos\theta |J| dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 6r^2 cos\theta dr d\theta = \int_2^{\frac{\pi}{2}} 6cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 d\theta$$

$$= 52 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta = 52[sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 52 \,.$$

4. *i*) Με χρήση του θεωρήματος *Green* να υπολογιστεί το εμβαδόν της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
ii) Για $a = 2$ και $b = 3$ να υπολογιστεί η εξερχόμενη ροή του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F} = (2x, 5y)$ από την καμπύλη C της έλλειψης.

Λύση:



i) Η εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ αποτελεί μία έλλειψη με ημιάξονες a και b. Επομένως έχουμε μια απλή κλειστή καμπύλη C με εσωτερικό χωρίο το D το οποίο είναι απλά συνεκτικό και του οποίου αναζητάμε το εμβαδόν. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{\partial D}\overrightarrow{F}\cdot dS\ .$$

Δηλαδή μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του D από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του συνόρου του.

Σημείωση: Αυτό προκύπτει εύκολα από το $A=\iint_D dxdy=\iint_D 1dxdy$, καθώς αν χρησιμοποιήσουμε αντίστροφα το θεώρημα του $Green$ αρκεί να βρούμε διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$. Επομένως αν επιλέξουμε το $\overrightarrow{F}(x,y)=(-y/2,x/2)$ έχουμε ότι $\dfrac{1}{2}\int_{\partial D=C} xdy-ydx=\dfrac{1}{2}\iint_D(1+1)dxdy=\iint_D 1dxdy=A$.

Επομένως για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους παίρνουμε την παραμέτρηση της έλλειψης

$$\overrightarrow{r}(\theta)=(acos\theta,bsin\theta)=(x(\theta),y(\theta))\ ,\quad \theta\in[0,2\pi]\ .$$

Επιπλέον

$$\frac{dx}{d\theta}=-asin\theta\ \Rightarrow\ dx=-asin\theta d\theta\quad ,\quad \frac{dy}{d\theta}=bcos\theta\ \Rightarrow\ dy=bcos\theta d\theta\ .$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από:

$$\begin{aligned}A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-bsin\theta(-asin\theta)+acos\theta(bcos\theta)\right]d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(sin^2\theta+cos^2\theta)d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abd\theta=\pi ab\ .\end{aligned}$$

$ii)$ Για τον υπολογισμό της εξερχόμενης ροής ($flux$) θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy$$

Επομένως αφού $\overrightarrow{F}(x, y) = (2x, 5y)$ έχουμε ότι:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 5 \ .$$

Η ζητούμενη ροή επομένως θα δίνεται από:

$$\iint_D (2+5) dxdy = \iint_D 7dxdy \ .$$

Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε ότι για $x' = \dfrac{x}{2}$ και $y' = \dfrac{y}{3}$ η εξίσωση της έλλειψης γίνεται $x'^2 + y'^2 = 1$. επομένως εφαρμόζοντας πολικές για τα x' και y' έχουμε:

$$x' = rcos\theta \ \Rightarrow \ x = 2rcos\theta \ , \quad y' = rsin\theta \ \Rightarrow \ y = 3rsin\theta$$

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2cos\theta & -2rsin\theta \\ 3sin\theta & 3rcos\theta \end{vmatrix} = 6r \ .$$

Αφού το χωρίο D είναι το εσωτερικό της έλλειψης $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ έπεται ότι

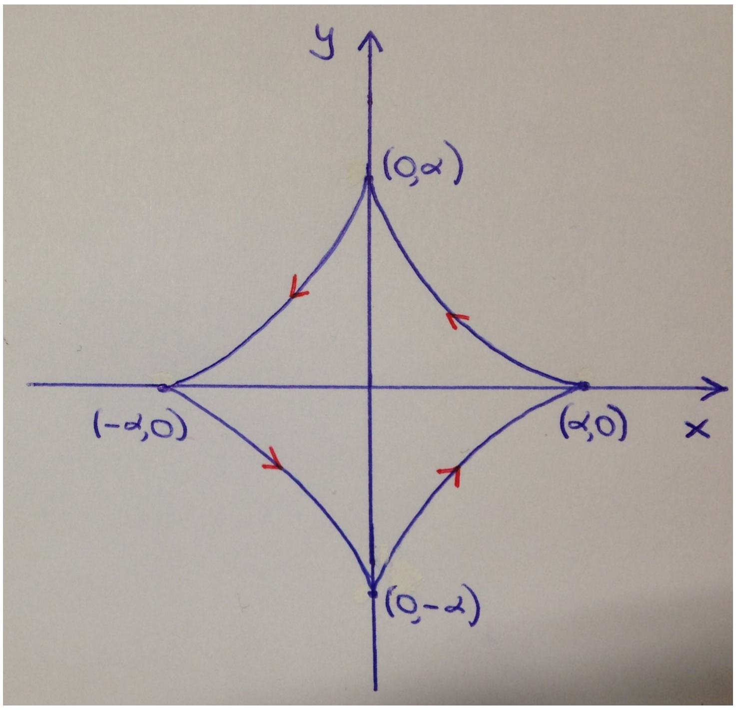
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1 \ \Rightarrow \ x'^2 + y'^2 \leqslant 1 \ \Rightarrow \ r^2 \leqslant 1 \ \Rightarrow \ 0 \leqslant r \leqslant 1 \ .$$

Για την θ έχουμε προφανώς ότι $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Το ζητούμενο εμβαδόν επομένως δίνεται από:

$$7 \iint_D dxdy = 7 \int_0^1 \int_0^{2\pi} |J| d\theta dr = 42 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 42 \int_0^1 r[\theta]_0^{2\pi} dr$$
$$= 84\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 42\pi \ .$$

5. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την υποκυκλοειδή καμπύλη $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a$, $a > 0$, χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (acos^3\theta, asin^3\theta)$, για $\theta \in [0, 2\pi]$.

Λύση:



Όπως φαίνεται είτε από το σχήμα είτε από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(\theta)$ η καμπύλη είναι κλειστή, απλή και κατα τμήματα C^1. Επιπλέον αποτελεί το σύνορο του χωρίου D ως προς το οποίο είναι θετικά προσανατολισμένη και το οποίο είναι ανοικτό και συνεκτικό και του οποίου το εμβαδόν αναζητάμε. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τον τύπο για το εμβαδόν που χρησιμοποιήσαμε και στην προηγούμενη άσκηση. Για να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής πρέπει να υπολογίσουμε τα $dx/d\theta$ και $dy/d\theta$. Έχουμε λοιπόν

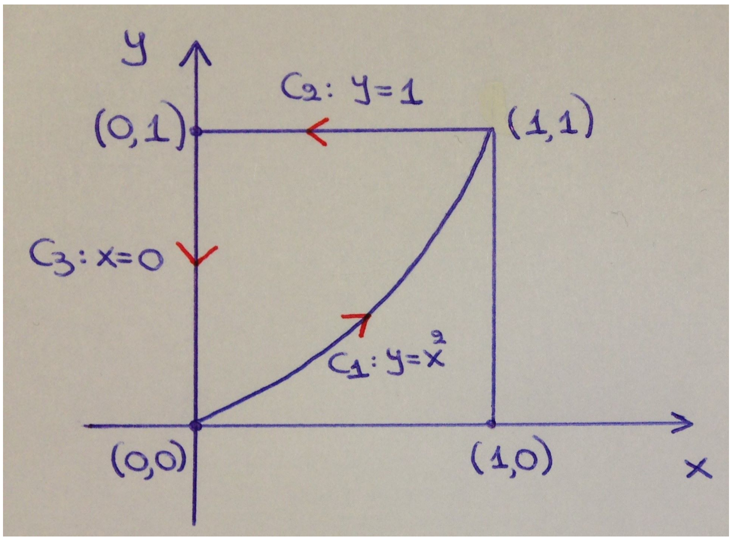
$$\frac{dx}{d\theta} = 3asin^2\theta cos\theta \;\Rightarrow\; dx = 3asin^2\theta cos\theta d\theta \ ,$$
$$\frac{dy}{d\theta} = -3acos^2\theta sin\theta \;\Rightarrow\; dy = -3acos^2\theta sin\theta d\theta \ .$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου D δίνεται από:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[acos^3\theta(3asin^2\theta cos\theta) - asin^3\theta(-3acos^2\theta sin\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \left(sin^2\theta cos^4\theta + cos^2\theta sin^4\theta\right) d\theta \\
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} sin^2\theta cos^2\theta d\theta = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} sin^2 2\theta d\theta \\
&= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-cos4\theta}{2}\right) d\theta = \ldots = \frac{3}{8}\pi a^2 \ .
\end{aligned}$$

6. Να υπολογισθεί το έργο που παράγεται από το πεδίο δυνάμεων $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+xy^2, 2(x^2y - y^2 siny))$, κατα μήκος της καμπύλης C που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση:



Όπως βλέπουμε και από το σχήμα, η καμπύλη C είναι απλή κλειστή και κατα τμήματα C^1. Επιπλέον είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το χωρίο D που περιβάλλει το οποίο θα είναι απλά συνεκτικό. Τέλος, το διανυσματικό πεδίο είναι C^1 στο D. Έπεται λοιπό ότι το έργο κατά μήκος της καμπύλης, με χρήση θεωρήματος $Green$ θα δίνεται από:

$$W = \int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \ .$$

Επομένως:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy \ .$$

Όσον αφορά τα άκρα του D ξεκινώντας με τα άκρα του x έχουμε:

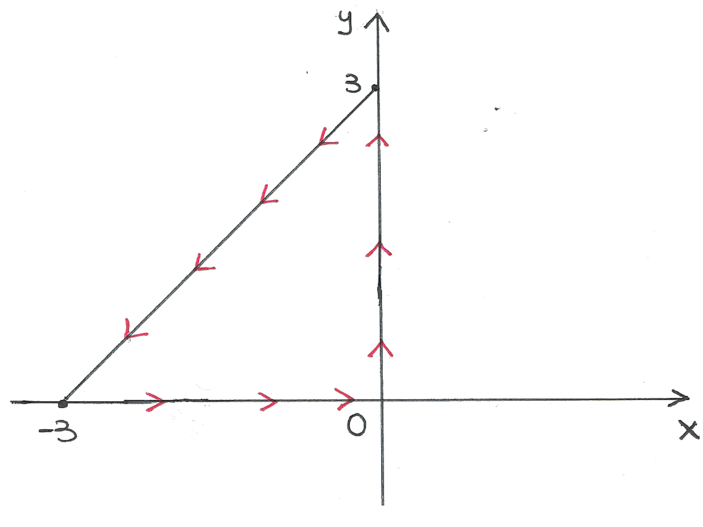
$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad , \quad x^2 \leqslant y \leqslant 1 \qquad (\text{ισοδύναμα } 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\ ) \ .$$

Άρα το ζητούμενο έργο είναι:

$$\iint_D (4xy - 2xy)dxdy = \iint_D 2xydxdy \overset{Fubini}{=} 2\int_0^1 \int_{x^2}^1 xydydx$$
$$= 2\int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 (x - x^5)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{3} \ .$$

7. Να επαληθευθεί το θεώρημα *Green* για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C (xy^2 + x^2)dx + (4x-1)dy$, όπου C η καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα:

Λύση:



Παρατηρούμε απο το σχήμα ότι η καμπύλη C είναι κλειστή, κατα τμήματα λεία C^1 και απλή (δεν τέμνει τον εαυτό της ή η παραμέτρηση της έχει παράγωγο $\neq 0$). Επιπλέον αποτελεί το σύνορο του απλά συνεκτικού χωρίου D και είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς αυτό.

Τέλος το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y)=(P,Q)=(xy^2+x^2,4x-1)$ είναι C^1 στο D. Άρα από το θεώρημα του $Green$ έπεται ότι:

$$\int_{C=\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\ .$$

Για να επαληθεύσουμε λοιπόν το θεώρημα, πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (αριστερό μέλος) και ξεχωριστά το διπλό ολοκλήρωμα (δεξί μέλος) και να δούμε αν είναι ίσα.

• (Επικαμπύλιο):
Έχουμε λοιπόν ότι $C=C_1\cup C_2\cup C_3$, όπου C_1,C_2,C_3 τα ευθύγραμμα τμήματα (C^1 απλές καμπύλες). Οι παραμετρήσεις τους λοιπόν θα είναι:

$$\begin{aligned}
C_1:\ &\overrightarrow{r}(t)=(1-t)(0,0)+t(0,3)=(0,3t)\ ,\quad 0\leqslant t\leqslant 1\\
&\qquad(\text{ή ισοδύναμα }\ (0,t)\ ,\quad 0\leqslant t\leqslant 3)\ .\\
C_2:\ &\overrightarrow{r}(t)=(1-t)(0,3)+t(-3,0)=(-3t,3-3t)\ ,\quad 0\leqslant t\leqslant 1\ .\\
C_3:\ &\overrightarrow{r}(t)=(1-t)(-3,0)+t(0,0)=(3(t-1),0)\ ,\quad 0\leqslant t\leqslant 1\\
&\qquad(\text{ή ισοδύναμα }\ (t,0)\ ,\quad -3\leqslant t\leqslant 0)\ .
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{C_1}(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy \overset{(x=0\ ,\ y=t)}{=} \int_0^3 (0t^2+0)0dt+\int_0^3(4\cdot 0-1)1dt$$
$$=\int_0^3(-1)dt=-3$$

$$\int_{C_2}(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy$$
$$\overset{(x=-3t\ ,\ y=3-3t)}{=}\int_0^1\left[(-3t)(3-3t)^2+(-3t)^2\right](-3)dt+\int_0^1\left[4(-3t)-1\right](-3)dt$$
$$=\int_0^1\left(81t^3-189t^2+81t\right)dt+\int_0^1(36t+3)\,dt=\ldots=\frac{75}{4}$$

$$\int_{C_3}(xy^2+x^2)dx+(4x-1)dy \overset{x=t\ ,\ y=0}{=} \int_{-3}^0\left(t0^2+t^2\right)1dt+\int_{-3}^0(4t-1)0dt$$
$$=\int_{-3}^0 t^2dt=9\ .$$

Επομένως

$$\int_C (xy^2 + x^2)dx + (4x-1)dy = -3 + \frac{75}{4} + 9 = \frac{99}{4} \ .$$

• (Διπλό):
Έχουμε ότι:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \ .$$

Επομένως υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (4-2xy)dxdy \ .$$

Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης των x και y. Ξεκινώντας με το x έχουμε:

$$-3 \leqslant x \leqslant 0 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant x+3 \ ,$$

όπου η ευθεία $y = x+3$ μπορεί να βρεθεί από τα σημεία $(x_1, y_1) = (0,3)$, $(x_2, y_2) = (-3, 0)$ και την εξίσωση $y = y_{1,2} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_{1,2})$. Επομένως:

$$\iint_D (4-2xy)dxdy \overset{Fubini}{=} \int_{-3}^{0} \int_{0}^{x+3} (4-2xy)dydx = \int_{-3}^{0} \left[4y - xy^2 \right]_0^{x+3} dx$$
$$= \int_{-3}^{0} \left(12 - 5x - 6x^2 - x^3 \right) dx = ... = \frac{99}{4} \ .$$