Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος

Ολική μάζα - Στατικές ροπές - Κέντρο βάρους - Ροπές αδρανείας ως προς τους άξονες Ox και Oy - Πολική ροπή αδρανείας

Ορισμός
Έστω D ένα φραγμένο και κανονικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και έστω ότι επάνω στο σύνολο D κατανέμεται μάζα αμελητέου πάχους, η οποία έχει συνεχή πυκνότητα $\delta(x,y)$, $(x,y) \in D$.

• Η ολική μάζα m του συνόλου D όριζεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$m = \iint_D \delta(x,y)dxdy \ .$$

• Οι στατικές ροπές (ή πρώτες ροπές) M_x και M_y του D ορίζονται από τους τύπους:

$$M_x = \iint_D y\delta(x,y)dxdy \quad , \quad M_y = \iint_D x\delta(x,y)dxdy \ .$$

• Το κέντρο βάρους (ή κέντρο μάζας) $C(\overline{x},\overline{y})$ του συνόλου D έχει συντεταγμένες που δίνονται από:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \quad , \quad \overline{y} = \frac{M_x}{m} \ .$$

• Οι ροπές αδρανείας (ή δεύτερες ροπές) I_x και I_y του D ως προς τους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα και η πολική ροπή αδρανείας I_0 ως προς το (0,0) ορίζονται από τους τύπους:

$$I_x = \iint_D y^2\delta(x,y)dxdy \quad , \quad I_y = \iint_D x^2\delta(x,y)dxdy \quad , \quad I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\delta(x,y)dxdy$$

και ισχύει

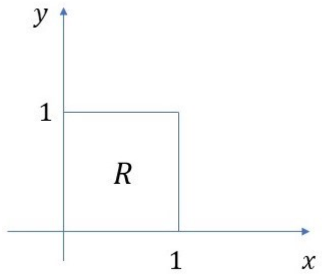
$$I_x + I_y = I_0 \ .$$

Άσκηση 1
Έστω το τετράγωνο $R = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Έστω ότι η πυκνότητα του R δίνεται από την συνάρτηση

$$\delta(x, y) = \frac{1}{y+1}.$$

Να βρεθεί η μάζα του χωρίου R.

Λύση



Από τον ορισμό έχουμε ότι η ζητούμενη μάζα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$m = \iint_R \delta(x, y) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{y+1} dxdy = \int_0^1 \frac{1}{y+1} \int_0^1 dxdy = \int_0^1 \frac{1}{y+1} [x]_0^1 dy$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{y+1} dy = [ln(y+1)]_0^1 = ln2\ .$$

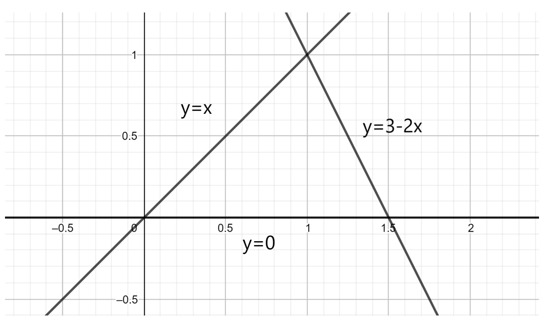
Άσκηση 2
Να υπολογιστεί η μάζα του τμήματος μίας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x, y) = 3x$ που περιέχεται ανάμεσα στις ευθείες $y = x$ και $y = 3 - 2x$ και την $y = 0$.

Λύση

Από τον ορισμό έχουμε ότι η ζητούμενη μάζα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$m = \iint_D \delta(x, y) dxdy\ ,$$

όπου D το χωρίο που περικλείεται από τις τρεις ευθείες. Οι τρεις ευθείες θα σχηματίζουν ένα τρίγωνο όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Για να βρούμε τα τρία άκρα (κορυφές) του τριγώνου παίρνουμε τις τομές των ευθειών ανα δύο. Επομένως λύνοντας τα ακόλουθα συστήματα:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ y = 3 - 2x \end{cases}$$

προκύπτουν τα σημεία $A(0,0)$, $B(\frac{3}{2},0)$, $C(1,1)$. Χωρίζοντας το τρίγωνο σε δύο χωρία D_1 και D_2 τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$D_1 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant x \quad \text{και} \quad D_2 \ : \ 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 3 - 2x \ .$$

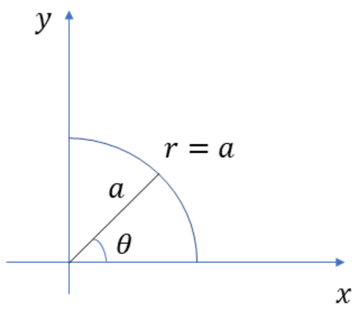
Επομένως το ζητούμενο διπλό ολοκλήρωμα δίνεται από:

$$\begin{aligned} m &= \iint_{D_1} \delta(x,y) dxdy + \iint_{D_2} \delta(x,y) dxdy = \int_0^1 \int_0^x 3xdydx + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_0^{3-2x} 3xdydx \\ &= \int_0^1 3x \int_0^x dydx + \int_1^{\frac{3}{2}} 3x \int_0^{3-2x} dydx = 3 \int_0^1 x[y]_0^x dx + 3 \int_1^{\frac{3}{2}} x[y]_0^{3-2x} dx \\ &= 3 \int_0^1 x^2 dx + 3 \int_1^{\frac{3}{2}} (3x - 2x^2) dx = \left[x^3\right]_0^1 + \left[\frac{9x^2}{2} - 2x^3\right]_1^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η μάζα m, οι ροπές M_x, M_y, το κέντρο βάρους C, οι ροπές αδρανείας I_x, I_y και η πολική ροπή αδρανείας I_0 του συνόλου $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant a^2, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}$ με πυκνότητα μάζας $\delta(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Λύση



Καθώς το χωρίο D είναι κυκλικός τομέας, θα διευκολύνει η χρήση πολικών συντεταγμένων. Τα άκρα ολοκλήρωσης στο D επομένως θα είναι:

$$0 \leqslant r \leqslant a \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \ .$$

Από του παραπάνω ορισμούς επομένως έχουμε:

$$m=\iint_D \delta(x,y)dxdy=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2drd\theta=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi a^3}{6}\ ,$$

$$M_y=\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3cos\theta drd\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos\theta d\theta=\frac{a^4}{4}[sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{4}\ ,$$

$$M_x=\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3sin\theta drd\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin\theta d\theta=\frac{a^4}{4}[-cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4}{4}\ ,$$

$$\overline{x}=\overline{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{M_y}{m}=\frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{\pi a^3}{6}}=\frac{3a}{2\pi}\ ,$$

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^4drd\theta=\frac{a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi a^5}{10}\ ,$$

$$I_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^4cos^2\theta drd\theta=\frac{a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2\theta d\theta=\frac{a^5}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2\theta)d\theta=\frac{a^5}{10}\left[\theta+\frac{1}{2}sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^5\pi}{20}\ ,$$

$$I_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^4sin^2\theta drd\theta=\frac{a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2\theta d\theta=\frac{a^5}{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2\theta)d\theta=\frac{a^5}{10}\left[\theta-\frac{1}{2}sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^5\pi}{20}\ .$$