

Μήκος καμπύλης και Μέση τιμή συνάρτησης κατά μήκος καμπύλης

Ορισμός 1:

Έστω $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ μία απλή και λεία παραμετρική καμπύλη του \mathbb{R}^3 που ορίζεται από την απλή και λεία παραμέτρηση $\vec{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ως **μήκος** $l(\Gamma)$ της καμπύλης Γ ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$l(\Gamma) := \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Ορισμός 2:

Έστω $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ μία απλή και λεία παραμετρική καμπύλη του \mathbb{R}^3 που ορίζεται από την απλή και λεία παραμέτρηση $\vec{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ και έχει μήκος $l(\Gamma) > 0$. Επίσης, έστω $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Ως **μέση τιμή** $\mu(f, \Gamma)$ της συνάρτησης f κατά μήκος της καμπύλης Γ ορίζεται (ο πραγματικός αριθμός):

$$\mu(f, \Gamma) := \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f ds$$

Σχόλιο: Το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt,$$

όπου $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ άρα $f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$

και $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ με $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.

Άσκηση 1:

Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = xy + z$ κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 2, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Λύση:

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται στον Ορισμό 2. Δηλαδή, θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} f ds$, επίσης θα υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης $l(\Gamma)$ και τέλος θα βρούμε τη ζητούμενη μέση τιμή $\mu(f, \Gamma)$ από τον τύπο του Ορισμού 2, δηλαδή διαιρώντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με το μήκος της καμπύλης.

Από $\vec{r}(t) = (t - \sin(t), 2, \cos(t))$ παίρνουμε $\vec{r}'(t) = (1 - \cos(t), 0, -\sin(t))$ και άρα

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(t)} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos(t))} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

[αφού $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ και $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1 - \cos(t)}{2}$].

Επίσης, $f(\vec{r}(t)) = x(t)y(t) + z(t) = (t - \sin(t))2 + \cos(t) = 2t - 2\sin(t) + \cos(t)$.

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} f ds$ δίνεται από:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\{2t - 2\sin(t) + \cos(t)\} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left\{ 2t - 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \right\} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt \end{aligned}$$

[αφού $\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ και $\cos(t) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1$]

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(4t \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 8 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4t \left(\frac{-\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right)' - 8 \left(\frac{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3 \frac{1}{2}} \right)' + 4 \left(\frac{-\cos^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3 \frac{1}{2}} \right)' - 2 \left(\frac{-\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right)' \right) dt \\
&= \left\{ 8 \left[-t \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} - 8 \int_0^{2\pi} \left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt \right\} - \frac{16}{3} \left[\sin^3\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} \\
&\quad - \frac{8}{3} \left[\cos^3\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} + 4 \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} \\
&= \left\{ 8(-2\pi \cos(\pi) - 0) - 8 \left[\frac{-\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} \right\} - \frac{16}{3} (\sin^3(\pi) - \sin^3(0)) \\
&\quad - \frac{8}{3} (\cos(\pi) - \cos(0)) + 4 (\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= \{ 8((-2\pi)(-1) - 0) - 16\{\sin(\pi) - \sin(0)\} - \frac{16}{3}(0 - 0) - \frac{8}{3}((-1)^3 - (1)^3) + 4(-1 - 1) \} \\
&= 16\pi - 16(0) - \frac{16}{3}(0) - \frac{8}{3}(-2) + 4(-2) = 16\pi + \frac{16}{3} - 8 = 8\left(2\pi - \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Επίσης, το μήκος $l(\Gamma)$ της καμπύλης Γ (από τον Ορισμό 1) δίνεται από:

$$\begin{aligned}
l(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^{2\pi} 2 \left(\frac{-\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right)' dt \\
&= 4 \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 4(-\cos(\pi) + \cos(0)) = 8.
\end{aligned}$$

Άρα τελικά η ζητούμενη μέση τιμή είναι ίση με:

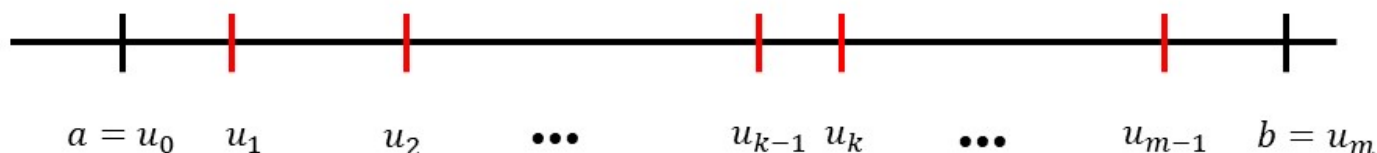
$$\mu(f, \Gamma) := \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f ds = \frac{1}{8} 8\left(2\pi - \frac{1}{3}\right) = 2\pi - \frac{1}{3}.$$

Αριθμητικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα μίας κατά τμήματα C^1 συνάρτησης

Ορισμός 3:

Έστω $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ μία κατά τμήματα C^1 παραμετρική καμπύλη του \mathbb{R}^3 , που ορίζεται από την κατά τμήματα C^1 παραμέτρηση $\vec{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Επίσης, έστω $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m = b]$ μία διαμέριση του $[a, b]$ η οποία προσδιορίζει τα C^1 τόξα $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ της καμπύλης Γ (δηλαδή $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_m$). Επίσης, έστω $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους** (ή **βαθμωτό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** ή **αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα**) $\int_{\Gamma} f ds$ της συνάρτησης f κατά μήκος της καμπύλης Γ , το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της f κατά μήκος των Γ_k για $k = 1, 2, \dots, m$, δηλαδή:

$$\int_{\Gamma} f ds := \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f ds = \sum_{k=1}^m \int_{u_{k-1}}^{u_k} f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$



Σχήμα: Διαμέριση $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m = b]$

Άσκηση 2:

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} (x + y^2 + e^z) ds$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\vec{r}(t) = (|t| + t, |t - 1|, t) : [-1, 3] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Λύση:

Η καμπύλη Γ δεν είναι C^1 στα σημεία $t = 0$ και $t = 1$ (δηλαδή στα σημεία που τα απόλυτα αλλάζουν τιμή). Θεωρώντας λοιπόν τη διαμέριση $P = [-1 < 0 < 1 < 3]$ του $[-1, 3]$ η καμπύλη Γ είναι κατά τμήματα C^1 (ως προς αυτή τη διαμέριση) και ισχύει ότι:

• Στο $[-1, 0]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = -t$ και $|t - 1| = 1 - t$.

Άρα $\vec{r}(t) = (-t + t, 1 - t, t) = (0, 1 - t, t)$.

Άρα $\vec{r}'(t) = (0, -1, 1) \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

• Στο $[0, 1]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = t$ και $|t - 1| = 1 - t$.

Άρα $\vec{r}(t) = (2t, 1 - t, t)$.

Άρα $\vec{r}'(t) = (2, -1, 1) \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

• Στο $[1, 3]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = t$ και $|t - 1| = t - 1$.

Άρα $\vec{r}(t) = (2t, t - 1, t)$.

Άρα $\vec{r}'(t) = (2, 1, 1) \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} f ds$ της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y^2 + e^z$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ δίνεται από τον Ορισμό 3 ως το άθροισμα:

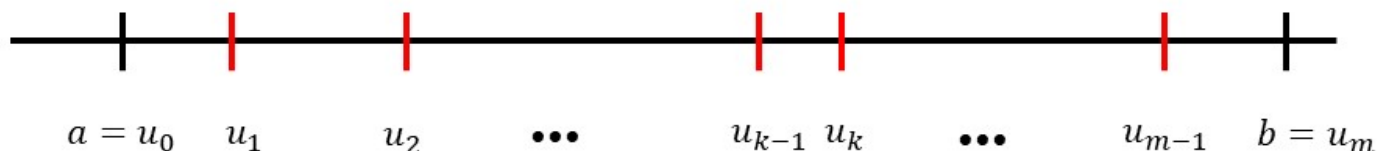
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_{-1}^0 f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt + \int_0^1 f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt + \int_1^3 f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_{-1}^0 (0 + (1 - t)^2 + e^t) \sqrt{2} dt + \int_0^1 (2t + (1 - t)^2 + e^t) \sqrt{6} dt + \int_1^3 (2t + (t - 1)^2 + e^t) \sqrt{6} dt \\ &= \sqrt{2} \int_{-1}^0 (1 - 2t + t^2 + e^t) dt + \sqrt{6} \int_0^1 (1 + t^2 + e^t) dt + \sqrt{6} \int_1^3 (1 + t^2 + e^t) dt \\ &= \sqrt{2} \int_{-1}^0 (1 - 2t + t^2 + e^t) dt + \sqrt{6} \int_0^3 (1 + t^2 + e^t) dt \\ &= \sqrt{2} \left([t]_{-1}^0 - [t^2]_{-1}^0 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^0 + [e^t]_{-1}^0 \right) + \sqrt{6} \left([t]_0^3 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^3 + [e^t]_0^3 \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{e} \right) + \sqrt{6} (11 + e^3) . \end{aligned}$$

Διανυσματικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα μίας κατά τμήματα C^1 συνάρτησης

Ορισμός 4:

Έστω $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ μία κατά τμήματα C^1 παραμετρική καμπύλη του \mathbb{R}^3 , που ορίζεται από την κατά τμήματα C^1 παραμέτρηση $\vec{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Επίσης, έστω $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m = b]$ μία διαμέριση του $[a, b]$ η οποία προσδιορίζει τα C^1 τόξα $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ της καμπύλης Γ (δηλαδή $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_m$). Επίσης, έστω $\vec{F} : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτερου είδους** (ή **διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα**) $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης \vec{F} κατά μήκος της καμπύλης Γ , το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της \vec{F} κατά μήκος των Γ_k για $k = 1, 2, \dots, m$, δηλαδή:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} := \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^m \int_{u_{k-1}}^{u_k} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$



Σχήμα: Διαμέριση $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m = b]$

Άσκηση 3:

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} x^2 dx + (x + y^2) dy + e^z dz$ κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\vec{r}(t) = \left(\sin|t|, \sin\left|t - \frac{\pi}{2}\right|, t^2 \right)$ για $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Λύση:

Η καμπύλη Γ δεν είναι C^1 αφού δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $t = 0$ και $t = \frac{\pi}{2}$.

Θεωρώντας λοιπόν τη διαμέριση $P = \left[-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} < \pi\right]$ του $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

η καμπύλη Γ είναι κατά τμήματα C^1 (ως προς αυτή τη διαμέριση) και ισχύει ότι:

• Στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ έχουμε ότι: $t \leq 0$ άρα $|t| = -t$ και $t - \frac{\pi}{2} \leq 0$ άρα $\left|t - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - t$.

Άρα $\vec{r}(t) = \left(\sin(-t), \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right), t^2 \right) = \left(-\sin(t), \cos(t), t^2 \right)$

[αφού $\sin(-t) = -\sin(t)$ και $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$]

Άρα $\vec{r}'(t) = \left(-\cos(t), -\sin(t), 2t \right)$.

• Στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ότι: $t \geq 0$ άρα $|t| = t$ και $t - \frac{\pi}{2} \leq 0$ άρα $\left|t - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - t$.

Άρα $\vec{r}(t) = \left(\sin(t), \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right), t^2 \right) = \left(\sin(t), \cos(t), t^2 \right)$

Άρα $\vec{r}'(t) = \left(\cos(t), -\sin(t), 2t \right)$.

• Στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ έχουμε ότι: $t \geq 0$ άρα $|t| = t$ και $t - \frac{\pi}{2} \geq 0$ άρα $\left|t - \frac{\pi}{2}\right| = t - \frac{\pi}{2}$.

Άρα $\vec{r}(t) = \left(\sin(t), \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right), t^2 \right) = \left(\sin(t), -\cos(t), t^2 \right)$

[αφού $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -\cos(t)$]

Άρα $\vec{r}'(t) = \left(\cos(t), \sin(t), 2t \right)$.

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

της $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, x + y^2, e^z)$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ δίνεται από τον Ορισμό 4 ως το άθροισμα:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{-\pi/2}^0 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt + \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\
&= \int_{-\pi/2}^0 \left((-\sin(t))^2, -\sin(t) + \cos^2(t), e^{t^2} \right) \cdot (-\cos(t), -\sin(t), 2t) dt \\
&\quad + \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2(t), \sin(t) + \cos^2(t), e^{t^2} \right) \cdot (\cos(t), -\sin(t), 2t) dt \\
&\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\sin^2(t), \sin(t) + (-\cos(t))^2, e^{t^2} \right) \cdot (\cos(t), \sin(t), 2t) dt
\end{aligned}$$

Παρακάτω υπολογίζουμε το πρώτο από τα τρία ολοκληρώματα και αντίστοιχα δουλεύουμε για τα υπόλοιπα δύο ολοκληρώματα.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/2}^0 \left((-\sin(t))^2, -\sin(t) + \cos^2(t), e^{t^2} \right) \cdot (-\cos(t), -\sin(t), 2t) dt \\
&= \int_{-\pi/2}^0 \left(-\sin^2(t)\cos(t) + \sin^2(t) - \cos^2(t)\sin(t) + 2te^{t^2} \right) dt \\
&= \int_{-\pi/2}^0 \left(-\sin^2(t)\cos(t) + \frac{1 - \cos(2t)}{2} - \cos^2(t)\sin(t) + 2te^{t^2} \right) dt \\
&= -\left[\frac{\sin^3(t)}{3} \right]_{-\pi/2}^0 + \left\{ \frac{1}{2}[t]_{-\pi/2}^0 - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^0 \right\} + \left[\frac{\cos^3(t)}{3} \right]_{-\pi/2}^0 + [e^{t^2}]_{-\pi/2}^0
\end{aligned}$$