Ασκήσεις στα Ολοκληρώματα

Άσκηση 1

$$\begin{aligned}\int xsin2x\,dx &= \int x\left(-\frac{1}{2}cos2x\right)'dx = -\frac{1}{2}\int x\,(cos2x)'\,dx = -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \int (x)'cos2x\,dx\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \int cos2x\,dx\right) = -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \int \left(\frac{1}{2}sin2x\right)'dx\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(xcos2x - \frac{1}{2}sin2x\right) + c = -\frac{1}{2}xcos2x + \frac{1}{4}sin2x + c\ .\end{aligned}$$

Άσκηση 2

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-x}\,dx &= \int x^2\left(-e^{-x}\right)'dx = -\int x^2\left(e^{-x}\right)'dx = -\left(x^2e^{-x} - \int \left(x^2\right)'e^{-x}\,dx\right)\\ &= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2\int x\left(e^{-x}\right)'dx\\ &= -x^2e^{-x} - 2\left(xe^{-x} - \int (x)'\,e^{-x}\,dx\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx\\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int \left(-e^{-x}\right)'dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c\ .\end{aligned}$$

Άσκηση 3

$$\begin{aligned}\int x^2lnx\,dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)'lnx\,dx = \frac{x^3}{3}lnx - \int \frac{x^3}{3}\,(lnx)'\,dx = \frac{x^3}{3}lnx - \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}lnx - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}lnx - \frac{1}{3}\int \left(\frac{x^3}{3}\right)'dx = \frac{x^3}{3}lnx - \frac{x^3}{9} + c\ .\end{aligned}$$

Άσκηση 4

$$\begin{aligned}I = \int e^xcosx\,dx &= \int (e^x)'\,cosx\,dx = e^xcosx - \int e^x\,(cosx)'\,dx = e^xcosx - \int e^x(-sinx)\,dx\\ &= e^xcosx + \int e^xsinx\,dx = e^xcosx + \int (e^x)'\,sinx\,dx = e^xcosx + e^xsinx - \int e^x\,(sinx)'\,dx\\ &= e^xcosx + e^xsinx - \int e^xcosx\,dx = e^xcosx + e^xsinx - I\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$I = \int e^xcosx\,dx = e^xcosx + e^xsinx - I$$

δηλαδή

$$2I = e^xcosx + e^xsinx \implies I = \frac{1}{2}\left(e^xcosx + e^xsinx\right) + c\ .$$

Άσκηση 5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sin2x}{2}\right)'\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left[sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \frac{1}{4}\left(sin\pi - sin0\right) = \frac{1}{4}\pi\ .$$

Άσκηση 6
Ένα κινητό κινείται κατακόρυφα από κατάσταση ηρεμίας με επιτάχυνση $4t\ m/s^2$. Πόσο διάστημα θα έχει διανύσει μετά από 6 sec;

Λύση:
Αν $v(t)$ η ταχύτητα και $s(t)$ η μετατόπιση συναρτήσει του χρόνου t έχουμε ότι:

- $v(0) = 0\ , \quad s(0) = 0\ .$
- $v(t) = \int 4t\,dt = 2t^2\ m/s$ (το c προσδιορίζεται από το $v(0) = 0$).
- $s(t) = \int 2t^2\,dt = \frac{2}{3}t^3\ m$ (το c προσδιορίζεται από το $s(0) = 0$).

Επομένως μετά από 6 sec

$$s(6) = \frac{2}{3}6^3 = 144\,m\ .$$

Άσκηση 7
Ένα κινητό ξεκινάει από κατάσταση ηρεμίας με επιτάχυνση $a(t)$ η οποία δίνεται από

$$a(t) = cos\frac{\pi t}{6}\ m/s^2\ .$$

Να βρεθεί η απόσταση που διανύει το κινητό το 3ο δευτερόλεπτο.

Λύση:
Αφού ξεκινάει από κατάσταση ηρεμίας έχουμε ότι $v(0) = 0$ με

$$v(t) = \int a(t)dt = \int cos\frac{\pi t}{6}dt = \frac{6}{\pi}sin\frac{\pi t}{6}\ m/s\ .$$

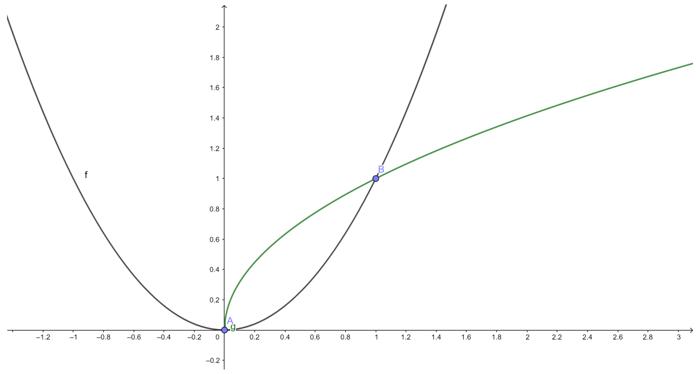
Η απόσταση του κινητού κατά το 3ο δευτερόλεπτο θα είναι

$$d = \int_2^3 v(t)dt = \int_2^3 \frac{6}{\pi}sin\frac{\pi t}{6}dt = \left[-cos\frac{\pi t}{6}\right]_2^3 = cos\frac{\pi}{3}\ m\ .$$

Άσκηση 8

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$.

Λύση:



Για να βρούμε το ζητούμενο χωρίο πρέπει να βρούμε τα 2 σημεία τομής των 2 καμπυλών. Άρα

$$\sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0$$

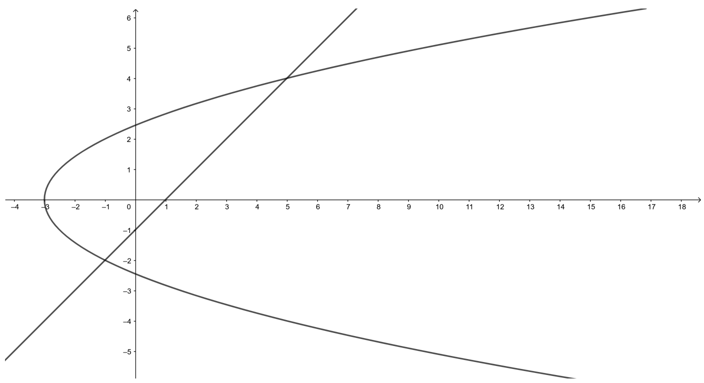
Επομένως τα 2 σημεία τομής θα είναι τα $x = 0$ και $x = 1$ καθώς $x \geqslant 0$ για να ορίζεται η $\sqrt{x}$. Το ζητούμενο εμβαδόν λοιπόν δίνεται από

$$E = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \ .$$

Άσκηση 9

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $x = \dfrac{1}{2}y^2 - 3$ και $y = x - 1$.

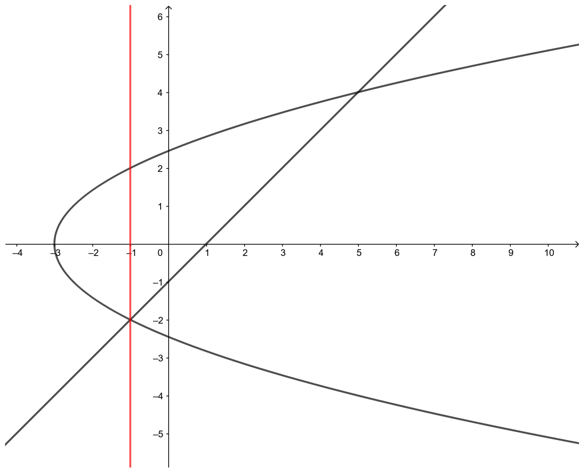
Λύση:



Για να βρούμε το ζητούμενο χωρίο πρέπει να βρούμε τα 2 σημεία τομής των 2 καμπυλών. Άρα

$$y + 1 = \frac{1}{2}y^2 - 3 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \ ,$$

με λύσεις $y = -2$ και $y = 4$ και αντίστοιχα $x = -1$ και $x = 5$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι από το $x=-3$ εώς το $x=-1$ οι 2 καμπύλες που περικλείουν το χωρίο είναι οι δύο κλάδοι της $x=\dfrac{1}{2}y^2-3 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2x+6}$ Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από

$$E=\int_{-3}^{-1}\left(\sqrt{2x+6}-(-\sqrt{2x+6})\right)dx+\int_{-1}^{5}\left(\sqrt{2x+6}-(x-1)\right)dx= \ ...$$

(ο υπολογισμός του E αφήνεται ως άσκηση) .

Ασκήσεις προς επίλυση

$i)\ \displaystyle\int lnx\,dx$, $\quad ii)\ \displaystyle\int xe^x cosx\,dx$, $\quad iii)\ \displaystyle\int cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$,

$iv)\ \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx$, $\quad v)\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} sin3x\,dx$, $\quad vi)\ \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{x^2}sin\frac{1}{x}\,dx$.