ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΠΟΙΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

1

Ορισμός: Έστω $[\alpha,\beta]$ κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $[\alpha,\beta]$, το $P=\{x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n\}$ τέτοια ώστε $x_0=\alpha$ και $x_n=\beta$.

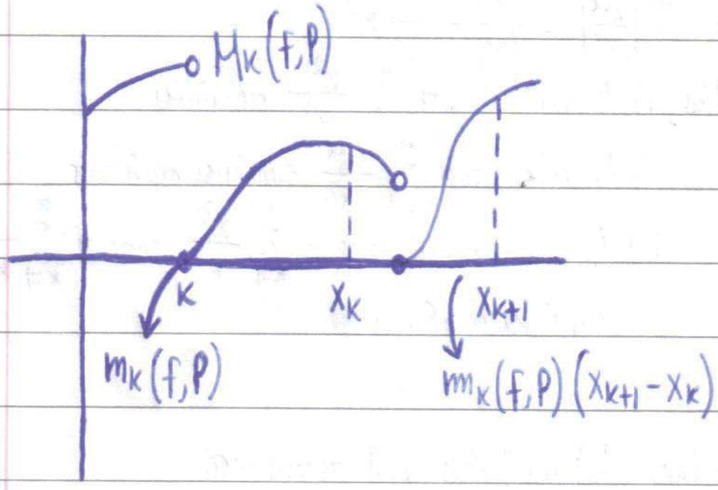
2 Κάθε διαμέριση $P=\{x_0<\dots<x_n\}$ του $[\alpha,\beta]$ χωρίζει το $[\alpha,\beta]$ στα διαστήματα $[x_\ell, x_{\ell+1}]$ με $\ell\in\{0,\dots,n-1\}$.

3 Αν $P=\{x_0<\dots<x_n\}$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ το πλάτος της P είναι η ποσότητα $\|P\|=\max\{x_{\ell+1}-x_\ell,\ \ell\in\{0,\dots,n-1\}\}$.

4 Έστω P, P_1 διαμερίσεις του $[\alpha,\beta]$. Λέμε ότι η P είναι εκλέπτυνση της P αν ισχύει ότι $P\subseteq P_1$.

5 Αν P,Q διαμερίσεις των $[\alpha,\beta]$, η κοινή εκλέπτυνση των P,Q είναι η διαμέριση $R=P\cup Q$.

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $P=\{x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n\}$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]$. Για κάθε $k\in\{0,\dots,n-1\}$ ορίζουμε $m_k(f,P)=\inf\{f(x)\mid x_k\le x\le x_{k+1}\}$ και $M_k(f,P)=\sup\{f(x)\mid x_k\le k\le x_{k+1}\}$.



Το άνω άθροισμα της f ως προς την P είναι η ποσότητα: $M(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(f,P)(x_{k+1}-x_k)$

Το κάτω άθροισμα της f ως προς την P είναι η ποσότητα: $L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(f,P)(x_{k+1}-x_k)$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι $L(f,P) \leq M(f,P)$

Πρόταση: Αν P_1, P_2 διαμερίσεις του $[a,\beta]$ και $f:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη τότε: $L(f,P_1) \leq M(f,P_2)$

Ορισμός: Έστω $f:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και θέτουμε $A(f) = \{ L(f,P) : P$ διαμέριση του $[a,\beta] \}$ και $B(f) = \{ M(f,P) : P$ διαμέριση του $[a,\beta] \}$. Παρατηρούμε ότι $\forall a \in A(f)$ και $\forall b \in B(f)$ έχουμε ότι $a < b$ (από υπόθεση).

Ορίζουμε το κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a,\beta]$ ως: $\underline{\int_a^b} f(t)dt = \sup A(f)$ και το άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a,\beta]$: $\overline{\int_a^b} f(t)dt = \inf B(f)$

Παρατηρούμε ότι $\underline{\int_a^b} f(t)dt \leq \overline{\int_a^b} f(t)dt$

Παρατήρηση: Εν γένει δεν είναι σωστό ότι $\underline{\int_a^b} f(t)dt = \overline{\int_a^b} f(t)dt$

π.χ. $f:[0,1] \to [0,1]$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$ (σύνολο Dirichlet)

Τότε $\underline{\int_0^1} f(t)dt = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} f(t)dt$

Ορισμός: Μια φραγμένη συνεχής $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ καλείται ολοκληρώσιμη Riemann αν ισχύει ότι, $\underline{\int_a^b} f(t)dt = \overline{\int_a^b} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

Κριτήριο Riemann: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη.

1. Η f είναι ολοκληρώσιμη Riemann.
2. $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε $0 \leq M(P,P_\varepsilon) - L(P,P_\varepsilon) < \varepsilon$
3. Υπάρχει μια ακολουθία (P_n) διαμέριση του $[a,b]$ με $\lim_{n \to \infty} M(f,P_n) - L(f,P_n) = 0$

Ορισμός: Κάθε μονότονη συνεχής $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη Riemann.

Θεώρημα: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη Riemann.

Ιδιότητες ολ. Riemann:

1. Αν $f:[a,\beta]$ με $f(x) = c \quad \forall x \in [a,\beta]$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη Riemann και $\int_a^\beta f(t)dt = c(\beta - a)$.
2. Αν $f,g:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη Riemann τότε η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη Riemann και $\int_a^\beta (f(t)+g(t))dt = \int_a^\beta f(t)dt + \int_a^\beta g(t)dt$
3. Αν $f:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη Riemann και $r \in \mathbb{R}$ τότε η $r \cdot f$ είναι ολοκληρώσιμη Riemann και $\int_a^\beta (r \cdot f(t))dt = r \cdot \int_a^\beta f(t)dt$.

④ Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c\in[\alpha,\beta]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη Riemann στο $[\alpha,\beta]$ αν η f είναι ολοκλήρωμα Riemann στο $[\alpha,c]$ και $[c,\beta]$. Επιπλέον, $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^c f(t)dt + \int_c^\beta f(t)dt$.

⑤ Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκλήρωμα Riemann και $m\le f(t)\le M$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$ τότε $m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(t)dt\le M(\beta-\alpha)$.

⑥ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}\to[c,d]$ ολοκλήρωμα Riemann και $\varphi:[c,d]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η $\varphi\circ f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκλήρωμα Riemann

⑦ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκλήρωμα Riemann. Τότε:

i) Η $|f|$ είναι ολοκλήρωμα Riemann, και $\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right|\le\int_\alpha^\beta f(t)dt$.

ii) Η f^2 είναι ολοκλήρωμα Riemann

iii) Αν $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκλήρωμα Riemann τότε $f\cdot g$ ολοκλ. Riemann

⑧ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκλήρωμα Riemann τέτοια ώστε $f(x)\ge 0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt\ge 0$.

⑨ Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκλήρωμα Riemann τέτοιες ώστε $f(x)\ge g(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt\ge\int_\alpha^\beta g(t)dt$.

<u>Ισοδύναμος ορισμός του ολ. Riemann:</u> Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ με την εξής ιδιότητα:

• Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε διαμέριση $P:\{x_0<\ldots<x_n\}$ του $[\alpha,\beta]$ με πλάτος $\|P\|<\delta$ και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ για $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ έχουμε: $\left[\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)-I(f)\right]<\varepsilon$

Σε αυτήν την περίπτωση, η ποσότητα $I(f)$ καλείται το ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(t)dt$.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκλήρωμα Riemann αν η f είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον αν η f είναι ολοκλήρωμα Riemann τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=I(f)$.

Παράδειγμα: Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη Riemann, άρα f ολοκληρώσιμη.

Αρκεί να δειχθεί ότι $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0\ \left|\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη υπάρχει $\delta=\delta(f)>0$ ώστε για κάθε P διαμέριση του $[0,1]$ με $\|P\|<\delta$ ...

Επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0}<\delta$. Έστω τώρα $n\geq n_0$ τυχαίο. Θεωρούμε τη διαμέριση του $[0,1]$ με $P_n=\{0=x_0<x_1=\frac{1}{n}<x_2=\frac{2}{n}<\dots<x_n=1\}$

Τότε $\|P_n\| = \frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\delta$. Άρα αν θέσουμε $\xi_k=\frac{k}{n}\ \forall k\in\{0,\dots,n-1\}$ ώστε: $\left|\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής και $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $g(x)\geq 0\ \forall x\in[\alpha,\beta]$. Τότε $\exists\ \xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Πόρισμα: Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε $\exists\ \xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\xi)=\frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}$. Προκύπτει από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ.Ο.Λ. για την $g=1$.

Παρατήρηση: (1) Η ποσότητα $\frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}$ καλείται η μέση τιμή της f.

Απόδειξη: Αφού η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έχει min και max δηλαδή $\exists\ m, M\in\mathbb{R}$ ώστε

$m=\min f(x) \Rightarrow m\leq f(x)$.

Αντίστοιχα ισχύει $M=\max f(x)\Rightarrow M\geq f(x)$.

Άρα υπάρχει $x\in[\alpha,\beta]$ ώστε $m\leq f(x)\leq M \overset{g(x)\geq 0}{\Leftrightarrow} m\cdot g(x)\leq g(x)\cdot f(x)\leq M\cdot g(x)$

$\Rightarrow m\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Περίπτωση 1: $\int_\alpha^\beta g(x)dx=0$. Τότε $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=0$ και συνεπώς $\forall\ \xi\in(\alpha,\beta): \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Περίπτωση 2: $\int_\alpha^\beta g(x)dx\neq 0$. Τότε αφού $g(x)\geq 0\ \forall x\in[\alpha,\beta]\Rightarrow\int_\alpha^\beta g(x)dx>0$

Άρα, $m\leq\frac{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx}\leq M$. Αφού η f είναι συνεχής, από Θ.Ε.Τ. $\exists\ \xi$ ώστε $f(\xi)=\frac{\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx}\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$

$= f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Ορισμός: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε $\forall x\in[\alpha,\beta]$ η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι η συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$.

Θεώρημα: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι μια συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη: Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, η f είναι φραγμένη, δηλαδή $\exists M>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Άρα, αν $x,y\in[\alpha,\beta]$ με $x\geq y$ τότε $|F(x)-F(y)|=$ $\left|\int_\alpha^x f(t)dt-\int_\alpha^y f(t)dt\right|=\left|\int_y^x f(t)dt\right|\leq\int_y^x|f(t)|dt\leq\int_y^x M dt=M(x-y)$.
Άρα $|F(x)-F(y)|\leq M(x-y)$ $\forall x,y\in[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $x_0\in[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F είναι παραγωγίσιμο στο x_0 και $F'(x_0)=f(x_0)$.

Θεώρημα (1ο Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού): Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

Ορισμός (παράγουσας): Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Μια συνάρτηση $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ καλείται παράγουσα της f (ή αντιπαράγωγος της f), αν $G'(x)=f(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

Παρατηρήσεις: ① Από το Π.Θ.Θ.Α.Λ., και η f συνεχής, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι μια νέα παράγουσα της f.

② Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Έστω $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια τυχούσα παράγουσα της f. Τότε $F'(x)=f(x)=G'(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ $(G-F)'(x)=0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ $G(x)-F(x)=c$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Ειδικότερα για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)-F(\alpha)=c\Rightarrow c=G(x)$. Δηλαδή $G(x)=F(x)+G(\alpha)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f, τότε $G(x)=\int_\alpha^x f(t)dt+G(\alpha)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Ειδικότερα, αν $x=\beta$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Παρατήρηση: Αν $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, δεν είναι εν γένει γνωστό ότι η G' είναι ολοκληρώσιμη και συνεπώς ΔΕΝ μπορούμε να πούμε ότι $\int_\alpha^\beta G'(x)\,dx = G(\beta)-G(\alpha)$.

Θεώρημα (Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού): Έστω $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη τότε $\int_\alpha^\beta G'(x)\,dx = G(\beta)-G(\alpha)$.

π.χ. $G:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $G(0)=0$ και $G(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$ $\forall x\in[0,1]$.

Θεώρημα (ολοκλήρωση κατά μέλη): Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες. Υποθέτουμε ότι οι f,g είναι ολοκληρώσιμες, τότε: $\int_\alpha^\beta fg' = fg\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'g$. Οπότε, θα ισχύει: $fg\Big|_\alpha^\beta = f(\beta)g(\beta)-f(\alpha)g(\alpha)$.

Απόδειξη: Η f,g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων και $(fg)' = f'g+fg'$ (A) άρα, από υπόθεση, η $(fg)'$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, $\int_\alpha^\beta f'g + \int_\alpha^\beta fg' = \int_\alpha^\beta (f'g+fg') \overset{(A)}{=} \int_\alpha^\beta (fg)' \overset{\text{Δ.Θ.Θ.Α.Λ.}}{=} f(\beta)g(\beta)-f(\alpha)g(\alpha)$.

Πρόταση: Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και η g είναι μονότονη και συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε $\exists\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε: $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx = g(\alpha)\int_\alpha^\xi f(t)\,dt + g(\beta)\int_\xi^\beta f(t)\,dt$.

Πρώτο θεώρημα αντικατάστασης: Έστω $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η φ' είναι ολοκληρώσιμη. Αν $I=\varphi([\alpha,\beta])$ και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\xi)\,d\xi$.

Δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης: Έστω $\psi[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη με $\psi'(x)\neq 0$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Αν $I=\psi([\alpha,\beta])$ (εικόνα της ψ) και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\,dt = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(t)(\psi^{-1})'\,dt$.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ:

① Υποθέτουμε ότι $\beta\in\mathbb{R}$ ή $\beta=\pm\infty$ και $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall x\in[\alpha,\beta]$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\beta^-}\int_a^x f(t)dt$ ⊛ και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,\beta)$ και θέτουμε: $\int_a^\beta f(t)dt = \lim_{x\to\beta^-}\int_a^x f(t)dt$. Αν το όριο ⊛ είναι το $\pm\infty$ τότε λέμε ότι το $\int_a^\beta f(t)dt$ απειρίζεται στο $\pm\infty$. Ανάλογα ορίζουμε το $\int_a^\beta f(t)dt$ και $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ με $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$.

Παραδείγματα για το ①: i) Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
Αν $x\in[1,+\infty)$, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[1,x]$ και $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^x = 1-\frac{1}{x}$, άρα $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$. Συνεπώς, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt = 1$.

ii) Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$.
Για κάθε $x\in[1,+\infty)$ έχουμε $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln t\Big|_1^x = \ln x$, άρα $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)dt = +\infty$, συνεπώς το $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ απειρίζεται στο $+\infty$.

iii) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x$. Αν $x\in(0,1)$ η f είναι συνεχής στο $[x,1]$ και $\int_x^1 \ln t\,dt = t\cdot\ln t - t\Big|_x^1 = (-1-x\cdot\ln x+x)$ άρα $\lim_{x\to0^+}\int_x^1 \ln t\,dt = \lim_{x\to0^+}(-1-x\ln x+x) = -1$. Συνεπώς, ισχύει ότι $\int_0^1 \ln t\,dt = 1$.

iv) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Για κάθε $x\in[0,1]$ η f είναι συνεχής στο $[0,x]$ άρα και ολοκληρώσιμη, οπότε θα ισχύει:
$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = -2(1-t)^{1/2}\Big|_0^x = -2\left(\sqrt{1-x}-1\right)$. Άρα έχουμε ότι $\lim_{x\to1^-}\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \lim_{x\to1^-}\left[-2\left(\sqrt{1-x}-1\right)\right]=2$. Συνεπώς, $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt=2$

v) Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin x$. Αν $x\in[0,+\infty)$ τότε $\int_0^x \sin t\,dt = \cos t\Big|_0^x = -\cos x+1$. Αλλά $\lim_{x\to+\infty} -\cos x$ δεν υπάρχει, άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

② Υποθέτουμε ότι $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ και $\beta\in\mathbb{R}$ ή $\beta=+\infty$ και $f:(a,\beta)\to\mathbb{R}$ ώστε $\forall a\le y\le\beta$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,y]$. Θεωρούμε $c\in(a,\beta)$ (τυχαίο) και εξετάζουμε τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$\int_a^c f(t)dt$ ή $\int_c^\beta f(t)dt$. Αν υπάρχουν και τα δύο ολοκληρώματα τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f υπάρχει και $\int_a^\beta f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^\beta f(t)dt$. Σε αυτήν την περίπτωση η ποσότητα $\int_a^\beta f(t)dt$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη της επιλογής του c. Αν κάποιο από τα $\int_a^c f(t)dt$, $\int_c^\beta f(t)dt$ δεν ορίζεται, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a,β) δεν ορίζεται. Αν $\int_a^c f(t)dt = \int_c^\beta f(t)dt = +\infty$ ή $\int_a^c f(t)dt = \int_c^\beta f(t)dt = -\infty$ τότε $\int_a^\beta f(t)dt = +\infty$ ή $\int_a^\beta f(t)dt = -\infty$. Διαφορετικά, αν $\int_a^c f(t)dt = +\infty$ και $\int_c^\beta f(t)dt = -\infty$ ή $\int_a^c f(t)dt = -\infty$ και $\int_c^\beta f(t)dt = +\infty$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Παράδειγμα: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Έχουμε $\int_0^\infty \frac{t}{t^2+1}dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt =$
$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_0^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = +\infty$.
Όμοια, $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{t^2+1}dt = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_x^0 = -\infty$, δεν ορίζεται γενικευμένο ολοκλήρωμα.

ΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Θεώρημα: Έστω $f: [1,+\infty] \to \mathbb{R}$ φθίνουσα με μη αρνητικές τιμές και θεωρούμε την ακολουθία (a_k) με $a_k = f(k)$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty f(t)dt$ υπάρχει.

Παραδείγματα: i) Η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\cdot\ln k}$ αποκλίνει γιατί $\int_2^\infty \frac{1}{t\cdot\ln t}dt = \lim_{x\to\infty}\int_2^x \frac{1}{x\cdot\ln x} \overset{y=\ln t}{=} \lim_{x\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln x}\frac{1}{y}dy$
$= \lim_{x\to+\infty} \ln y\Big|_{\ln 2}^{\ln x} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) = +\infty$

ii) Η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(\ln k)^2}$ συγκλίνει γιατί $\int_0^\infty \frac{1}{k(\ln k)^2}dk = \lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^2}dt \overset{y=\ln t}{=}$
$\lim_{x\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln x}\frac{1}{y^2}dy = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{y}\Big|_{\ln 2}^{\ln x} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}$

Άσκ. 2 σελ. 104: Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική τέτοια ώστε $\int_0^1 f(t)dt = 1$. Να δειχθεί ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ του $[0,1]$ ώστε $\int_{t_0}^{t_{k+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}$ $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$

Λύση: Έστω $F:[0,1] \to \mathbb{R}$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Τότε:

(α) Η F είναι συνεχής, $F(0)=0$, $F(1)=1$

(β) Η F είναι αύξουσα για $0 \le x \le y \le 1$, τότε $F(x) - F(y) = \int_0^y f(t)dt - \int_0^x f(t)dt =$
$= \int_x^y f(t)dt \geq 0$ αφού $f(z) \geq 0$ $\forall z \in [0,1]$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ τυχαίος. Θα επιλέξουμε τα σημεία της διαμέρισης $t_0, \dots, t_n$ αναδρομικά τέτοια ώστε ① $t_0=0$, $t_n=1$ και ② $\forall \kappa \in [0, \dots, n-1]$ έχουμε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt = 1$.

ΒΗΜΑ 1ο — ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ t_1

Η f είναι συνεχής και $f(0)=0$ και $f(1)=1$, αφού $0 \le \frac{1}{n} \le 1$, από θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $t_1 \in [0,1]$ ώστε $\int_0^{t_1} f(t)dt = \frac{1}{n} = F(t_1)$.

Ειδικότερα, $t_1 \in (0,1)$.

ΒΗΜΑ 2ο — ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ

Έστω $\kappa \in \{0, \dots, n-1\}$ και $t_0, \dots, t_\kappa$ έχουν ήδη επιλεχθεί ώστε τα ① και ② ικανοποιούνται.

Περίπτωση 1: Αν $\kappa = n-2 \Rightarrow t_n = 1$.

Τότε $\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\,dt = \int_{t_{n-1}}^{1} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \left(\int_0^{t_{n-1}} f(t)dt\right) = \rightarrow$

$\rightarrow = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n-2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt\right) = 1 - \left((n-1)\cdot\frac{1}{n}\right) = \rightarrow$

$\rightarrow = \frac{n-(n-1)}{n} = \frac{1}{n}$ ↑ από επαγωγική υπόθεση

Περίπτωση 2: $\kappa < n-1$. Πρέπει να βρούμε ένα σημείο $t_{\kappa+1}$ στο διάστημα $(t_\kappa, 1)$ ώστε $\int_{t_\kappa}^{t_{\kappa+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}$. Παρατηρούμε ότι $\int_0^{t_\kappa} f(t)dt = \sum_{i=0}^{\kappa-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt = \frac{\kappa}{n}$ από επαγωγική υπόθεση. Έστω $F:[t_{\kappa-1}] \to \mathbb{R}$ ο περιορισμός του αόριστου ολοκληρώματος της f στο διάστημα $[t_\kappa, 1]$. Τότε:

Ⅰ Η F είναι συνεχής και αύξουσα

Ⅱ $F(t_\kappa) = \frac{\kappa}{n}$, $F(1)=1$ και $\frac{\kappa}{n} < 1$

Αφού, $\frac{\kappa}{n} < \frac{\kappa+1}{n} < 1$, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $z \in [t_\kappa, 1]$ ώστε $f(z) = \frac{\kappa+1}{n}$. Ειδικότερα, $z \in (t_\kappa, 1)$. Θέτουμε $t_{\kappa+1} = z$. Τότε, $t_\kappa \le t_{\kappa+1} \le 1$. Αρκεί ν.δ.ο. $\int_{t_\kappa}^{t_{\kappa+1}} f(t)dt = \frac{1}{n}$.

$\int_{t_\kappa}^{t_{\kappa+1}} f(t)dt = \int_0^{t_{\kappa+1}} f(t)dt - \int_0^{t_\kappa} f(t)dt = F(t_{\kappa+1}) - F(t_\kappa) = \rightarrow$

$\rightarrow = F(z) - \frac{\kappa}{n} = \frac{\kappa+1}{n} - \frac{\kappa}{n} = \frac{1}{n}$

Τελειώνει το γενικό επαγωγικό βήμα.

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ⓐ Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \ k \neq -1$

$\int \frac{1}{k} dx = \ln|x| + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int \sin dx = -\cos + c$

$\int \cos dx = \sin + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin + c$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan + c$

Ⓑ Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

(B₁) Υπολογισμός του $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$: κάνουμε αντικατάσταση $u=\varphi(t)$ και ανάγουμε στο $\int f(u)\,du$.

π.χ. ① $\int \frac{\arctan}{1+x^2} dx$, αντικατάσταση $u = \arctan$ άρα $du = \frac{dx}{1+x^2}$. Συνεπώς έχουμε $\int u\,du = \frac{u^2}{2} + c$

Άρα, $\int \frac{\arctan}{1+x^2} dx = \frac{(\arctan x)^2}{2} + c$

② $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int -\frac{\sin x}{\cos x} dx$. Αν $u = \cos x$ τότε $du = -\sin x\, dx$.
Άρα, ανάγομαστε στο $-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c$. Άρα, $\int \tan x\, dx = \ln|\cos x| + c$.

③ $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} dx$. Αν $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ τότε $du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} dx$, άρα ανάγομαστε στο $\int \cos u\, du$.

(B₂) Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ... π.χ. $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

π.χ. ① $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx \overset{u=2x}{=} \ldots$

② $\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx \underset{du=-\sin x\, dx}{\overset{u=\cos x}{=}} -\int (1-u^2)^2 du = \ldots$

③ Την ίδια μέθοδο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για ολοκληρώματα της μορφής $\int \cos^m x \cdot \sin^n x\, dx$ όπου ένας από τους εκθέτες m ή n είναι περιττός, όπως το εξής:

$\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x\, dx = \int \cos x\,(\cos^2 x \cdot \sin^4 x)\, dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\sin^4 x\, dx \underset{du=\cos dx}{\overset{u=\sin x}{=}} \longrightarrow$

$\longrightarrow = \int (1-u^2) \cdot u^4\, du = \ldots$

④ Τα $\int \tan^2 x\,dx$ και $\int \cot^2 x\,dx$. Για το πρώτο έχουμε:

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] dx = \int \left[(\tan x)' - 1\right] dx = \tan x - x + c$$

$$\int \cot^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \left[(-\cot x)' - 1\right] dx = -\cot x - x + c$$

Β3) Υπολογισμός του $\int f(x)dx$ με αντικατάσταση $x = \varphi(t)$.

π.χ. (Τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

(α) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{a^2 - x^2}$ θέτουμε $x = a \cdot \sin t$. Τότε $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t$, $dx = a \cdot \cos t\, dx$, π.χ. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}} \underset{dx = 3\cos t}{\overset{x = 3\sin t}{=}} \int \frac{3\cos t}{9\sin^2 t\,(3\cos t)} dt = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sin^2 t} dt \Rightarrow$

$\rightarrow = -\frac{\cot t}{9} + c$

(β) Όλες οι μορφές που περιέχουν $\sqrt{x^2 - u^2}$ θέτουμε $x = \frac{u}{\cos t}$. Τότε $\sqrt{x^2 - u^2} = u \cdot \tan t$ και $dx = \frac{u \cdot \sin t}{\cos^2 t} dt$, π.χ. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$ θέτουμε $x = \frac{2}{\cos t}$, άρα $\sqrt{x^2 - 4} = 2\tan t$ και $dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t} dt$ άρα: $\int \frac{2\tan t}{2t\cos t} \cdot \frac{2\sin t}{\cos^2 t} dt = 2\int \tan^2 t\, dt$.

(γ) Αν $\sqrt{x^2 + a^2}$ τότε θέτουμε $\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t}$ και $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$, π.χ. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$ θέτουμε $x = \tan t$. Τότε $\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\cos t}$ και $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ άρα $\int \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt$
$= \int \frac{\cos t}{\sin^4 t} dt$.

Γ) Ολοκλήρωση κατά μέρη: Δηλαδή χρησιμοποιώντας τον κανόνα $\int fg' = fg - \int f'g$

Παραδείγματα: 1) $\int x \log x\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2)' \log x\, dx = \frac{1}{2}\left[[x^2 \log x] - \int x^2 \frac{1}{x} dx\right]$

2) $\int x\cos x\, dx = \int x(\sin x)' dx = [x \cdot \sin x] - \int \sin x\, dx$

3) $I = \int e^x \cdot \sin x\, dx$

Θέτουμε $I = \int e^x \cdot \sin x\, dx = \int (e^x)' \sin x\, dx = [e^x \cdot \sin x] - \int e^x \cos x\, dx$

$= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x\, dx$

$= e^x \cdot \sin x - e^x \cos x + \int e^x (\cos x)' dx$

$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\, dx$

$= e^x(\sin x - \cos x) - I$

$\Leftrightarrow I = e^x(\sin x - \cos x) - I \Leftrightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x) \Leftrightarrow I = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$

4) $\int x\cdot \sin^2 x\,dx$ αφού $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, έχουμε:

$$\int x\cdot\sin^2 x\,dx = \int \frac{x}{2}dx - \frac{1}{2}\int x\cdot\cos 2x\,dx = \dots$$

5) $\int \log(x+\sqrt{x})dx = \int x'\cdot \log(x+\sqrt{x})dx = x\cdot\log(x+\sqrt{x}) - \int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

<u>ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:</u> Ολοκλήρωση συναρτήσεων της μορφής $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} =$

$$= \frac{a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \dots + a_0}{\beta_m\cdot x^m + \beta_{m-1}\cdot x^{m-1} + \dots + \beta_0}$$

(α) Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx$, $k\in\mathbb{N}$:

αν $k=1$ τότε $\int \frac{1}{(x-\alpha)}\,dx = \ln|x-\alpha|+c$

αν $k\geq 2$ τότε $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} = \frac{-1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}}+c$

(β) Ολοκληρώματα της μορφής $\int\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$, $k\in\mathbb{N}$ όπου το $x^2+\beta x+\gamma$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Γράφουμε $Bx+\Gamma = \frac{B}{2}(2x+B)+\left(\Gamma-\frac{B\cdot B}{2}\right)$ και ανάγομαστε στα $\frac{B}{2}\int\frac{2x+B}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$ και $\int\frac{\Gamma-\frac{\beta^2}{2}}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$.

β1. Το ολοκλήρωμα $\int\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}\,dx$ υπολογίζεται με την αλλαγή μεταβλητής $y=x^2+\beta x+\gamma$.
Τότε $dy=(2x+\beta)\,dx$. Άρα έχουμε $\int\frac{1}{y^k}\,dy$.

β2. Για το ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{(x^2+\beta^2+\gamma)^k}\,dx$ γράφουμε πρώτα $x^2+\beta x+\gamma=\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{4\gamma-\beta^2}{4}$
Κάνουμε αντικατάσταση $x+\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}{2}y$ (είναι καλά ορισμένο γιατί $\beta^2-4\gamma<0$)
και ανάγομαστε στο $I_k=\int\frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$

Το ολοκλήρωμα I_k υπολογίζεται αναδρομικά:

(α) για $k=1$, $\int\frac{1}{y^2+1}\,dy=\arctan x$

(β) Γενικά ως εξής, $I_{k+1}=\frac{1}{2k}\cdot\frac{y}{(y^2+1)^k}+\frac{2k-1}{2k}I_k$

Πράγματι, $I_k=\int\frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy=\int\frac{y'}{(y^2+1)^k}\,dy=\frac{y}{(y^2+1)^k}+2k\left[\left[\int\frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy\right]\right]$

$$=\frac{y}{(y^2+1)^k}+2k\int\frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy-2k\int\frac{1}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy$$
$$=\frac{y}{(y^2+1)^k}+2kI_k-2kI_{k+1}$$