Διατάξεις - Μεταθέσεις

Έστω Ε ένα σύνολο με ***ν*** στοιχεία και έστω ένας θετικός ακέραιος ***k*** μικρότερος ή ίσος του ***ν*** (***k≤ν***). Κάθε διατεταγμένη k-αδα:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

διαφορετικών μεταξύ τους στοιχείων του Ε ονομάζεται **διάταξη *k*** στοιχείων του Ε ή όταν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς **διάταξη των *ν* στοιχείων ανά *k***.

Στην περίπτωση που ***ν*** = ***k*** χρησιμοποιούμε τον όρο **μετάθεση** των ***ν*** στοιχείων.

Διατάξεις - Μεταθέσεις

Πρόταση: Ο αριθμός $(\nu)_k$ των διατάξεων ***ν*** στοιχείων ανά ***k*** δίνεται από τον τύπο:

$$(\nu)_k=\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1), \quad 1\leq k\leq \nu$$

Πόρισμα: Ο αριθμός των μεταθέσεων ***ν*** στοιχείων δίνεται από τον τύπο:

$$\nu\,!=1\cdot 2\cdots \nu$$

Πόρισμα: Ο αριθμός $(\nu)_k$ των διατάξεων ***ν*** στοιχείων ανά ***k*** δίνεται από τον τύπο:

$$(\nu)_k=\frac{\nu!}{(\nu-k)!}$$

Διατάξεις - Μεταθέσεις

Παράδειγμα. Σε ένα supermarket υπάρχουν τρία ταμεία T_1, T_2, T_3. Αν στα ταμεία αυτά μπορούν να εργασθούν 6 διαφορετικοί υπάλληλοι με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν τα ταμεία; Ποια θα ήταν η απάντηση αν η εταιρεία διέθετε 6 ταμεία;

Απάντηση.

T_1	T_2	T_3
6	5	4

$(6)_3=6\cdot 5\cdot 4=120$

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
6	5	4	3	2	1

$6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=$ 720

Διατάξεις με επανάληψη

Έστω Ε ένα σύνολο με ***ν*** στοιχεία και έστω ένας θετικός ακέραιος ***k***. Κάθε διατεταγμένη k-αδα:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών στοιχείων του Ε ονομάζεται **διάταξη *k*** στοιχείων του Ε με επανάληψη ή όταν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς **διάταξη με επανάληψη των *ν* στοιχείων ανά *k***.

Έτσι στις διατάξεις με επανάληψη ανήκουν διατεταγμένες k-αδας της μορφής

$$(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1)\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_2)\ \text{κλπ}$$

Διατάξεις με επανάληψη

Πρόταση: Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων ***ν*** στοιχείων ανά ***k*** είναι ίσος με $\boldsymbol{\nu^k}$.

Παράδειγμα. Όταν συμπληρώνουμε ένα δελτίο ΠΡΟ-ΠΟ σχηματίζουμε μια διατεταγμένη 13-αδα, η οποία δίνει μια στήλη του δελτίου, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα 1, 2, Χ. Όλες οι διαφορετικές στήλες που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο είναι όσες οι διατάξεις με επανάληψη των 3 συμβόλων ανά 13. Δηλαδή μπορούμε να συμπληρώσουμε

$$3^{13} = 1594323 \quad \text{στήλες}$$

Συνδυασμοί

Έστω Ε ένα σύνολο με ***ν*** στοιχεία και έστω ένας θετικός ακέραιος ***k*** μικρότερος ή ίσος του ***ν*** (***k*** ≤ ***ν***).

Συνδυασμός των ***ν*** στοιχείων ανά ***k*** λέγεται κάθε (μη διατεταγμένη) συλλογή ***k*** **διαφορετικών** μεταξύ τους στοιχείων του Ε.

Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι **συνδυασμός** των ***ν*** στοιχείων ενός συνόλου Ε ανά ***k*** είναι κάθε υποσύνολο του Ε με ***k*** στοιχεία.

Το πλήθος των συνδυασμών των ***ν*** στοιχείων ανά ***k*** συμβολίζεται με $\binom{\nu}{k}$

Συνδυασμοί

Πρόταση: Ο αριθμός $\binom{\nu}{k}$ των συνδυασμών ***ν*** στοιχείων ανά ***k*** δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}, \qquad 1 \le k \le \nu$$

Για k=0 θέτουμε από σύμβαση:

$$\binom{\nu}{0} = 1$$

Συνδυασμοί

Στην περίπτωση που k>ν δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε κανένα συνδυασμό των ν στοιχείων ανά k, αφού δεν υπάρχουν k διαφορετικά στοιχεία για να χρησιμοποιηθούν. Έτσι θέτουμε:

$$\binom{\nu}{k} = 0, \quad \gamma\iota\alpha \quad k > \nu$$

Για ν=k έχουμε:

$$\binom{\nu}{\nu} = \frac{\nu!}{\nu!(\nu-\nu)!} = \frac{\nu!}{\nu!\cdot 0!} = \frac{\nu!}{\nu!\cdot 1} = 1$$

Συνδυασμοί

Παράδειγμα. Σε μια υπηρεσία εργάζονται 7 γυναίκες και 8 άνδρες. Να υπολογιστούν πόσες διαφορετικές πενταμελείς ομάδες εργασίας μπορούν να σχηματισθούν, αποτελούμενες από 2 γυναίκες και 3 άνδρες.

Απάντηση. Η επιλογή των γυναικών μπορεί να γίνει κατά

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{5!\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 5!}=21$$

τρόπους. Η επιλογή των ανδρών μπορεί να γίνει κατά

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 5!}=56$$

τρόπους. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός ομάδων εργασίας θα είναι

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{8}{3}=21\cdot 56=1176$$