ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

(X, Y) διδιάστατη κατανομή

$f(x,y)$ την από κοινού σ.π.π.

$f_Y(y)$

περιθώριες κατανομές

$f_X(x)$

$$f_{X|Y}(x|y^*) = \frac{f(x,y^*)}{f_Y(y^*)}$$

$$E\left(X \middle| Y = y^*\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in R_X} x\, f_{X|Y}(x|y^*) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y^*)\, dx \end{cases}$$

Αριθμός

__Συνάρτηση__ y αριθμού $\longrightarrow E(X|Y=y)$

$$m(y) = E(X|Y=y)$$

$f(x)$ $f(X)$ τ.μ.

Αν Y είναι τυχαία μεταβλητή, τότε

$m(Y)$ τυχαία μεταβλητή.

$$\boxed{E(X|Y)}$$ τ.μ. δεσμευμένη μέση τιμή.

<u>Θεώρημα</u>: $$\boxed{E\left[\underline{E(X|Y)}\right] = E(X)}$$

$Y=y \Rightarrow E(X|Y=y) = \ldots$

$E[\ldots] = \ldots$

Δύο τ.μ. X, Y έχουν την εξής κοινή συνάρτηση πιθανότητας

$x \backslash y$	1	2	3	$f_X(x)$
1	0.2	0.1	0.1	0.4
2	0.2	0.3	0.1	0.6
$f_Y(y)$	0.4	0.4	0.2	1

Βρείτε $E(X|Y)$

$y=1$ $\quad E(X|Y=1) = 1 \cdot f_{X|Y}(1|1) + 2 \cdot f_{X|Y}(2|1) =$

$$= 1 \cdot \frac{f(1,1)}{f_Y(1)} + 2 \frac{f(2,1)}{f_Y(1)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{0.2}{0.4} + 2 \cdot \frac{0.2}{0.4} = 1.5$$

$E(X|Y=2) = 1.75$

$E(X|Y=3) = 1.5$

$$E(X|Y) = \begin{cases} 1.5 & p=0.4 \\ 1.75 & p=0.4 \\ 1.5 & p=0.2 \end{cases}$$

$E[E(X|Y)] = 1.5 \cdot 0.4 + 1.75 \cdot 0.4 + 1.5 \cdot 0.2 = 1.6$

$E(X) = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6 = 1.6$

ή σ.π.π $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y) & 0<x,y<1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

Βρείτε $E(X|Y)$

Έστω $Y = y^*$ αυθαίρετο σταθερό

$$E(X|Y=y^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y^*)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x,y^*)}{f_Y(y^*)}\,dx$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx = \frac{4y+1}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad f_Y(y^*) = \frac{4y^*+1}{3}$$

$$\underset{m(y)}{E(X|Y=y^*)} = \int_0^1 x \frac{\frac{2}{3}(x+2y^*)}{\frac{4y^*+1}{3}}\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{3y^*+1}{4y^*+1}$$

αριθμός

$$y^* \to Y \Longrightarrow \boxed{E(X|Y) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3Y+1}{4Y+1}} \quad \text{τ.μ.}$$

$$E[E(X|Y)] = ; \quad = \int_0^1 \frac{2}{3}\,\frac{3y+1}{4y+1}\cdot\frac{4y+1}{3}\,dy = 5/9$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,\frac{2(x+1)}{3}\,dx = 5/9$$

Άσκηση: Δείξτε ότι:

$$E[E(X|Y)] = E(X)$$

στην συνεχή περίπτωση

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

$$E[E(X|Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \underline{f_{X|Y}(x|y)}\,dx \right) f_Y(y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x,y)}{\cancel{f_Y(y)}} \cdot \cancel{f_Y(y)}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\,dy = E(X)$$

Άσκηση: Με $N(t)$ = αριθμός "ενδιαφερομένων"

$M(t)$ = » "συμμετεχόντων"

σε χρονικό διάστημα $[0,t]$. Αν κάθε ενδιαφερόμενος γίνεται συμμετέχων με πιθανότητα p και $E[N(t)] = \lambda t$, βρείτε $E[M(t)]$.

Γνωρίζουμε ότι $E[M(t)] = E\left[E\left(M(t) \mid N(t)\right)\right]$

Ζητάω $E\left(M(t) \mid N(t)\right)$, άρα

$m(x) = E\left(M(t) \mid N(t) = x\right)$

Όταν $N(t) = x$ γνωστό $\Rightarrow M(t) \sim b(x, p)$ $\Rightarrow$

$m(x) = E\left(M(t) \mid N(t) = x\right) = xp \Longrightarrow$

$\Longrightarrow E\left(M(t) \mid N(t)\right) = N(t) \cdot p$ τ.μ. $\Longrightarrow$

$E\left[E\left(M(t) \mid N(t)\right)\right] = E\left[N(t) \cdot p\right] = pE[N(t)] =$
$= p\lambda t$

$$\boxed{E[M(t)] = p\lambda t}$$

Γενικευμένο Θ.Ο.Π.

Έστω A ένα ενδεχόμενο για κάποιο πείραμα και X μία τυχαία μεταβλητή

$$\Downarrow$$

$$P(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in R_X} P(A \mid X=x)\, f_X(x) & \text{διακριτή} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(A \mid X=x)\, f_X(x)\, dx & \text{συνεχής} \end{cases}$$

Άσκηση: Δείξατε το Γενικευμένο Θ.Ο.Π.

έστω τ.μ. $Y = \begin{cases} 1 & \text{αν συμβεί το } A \\ 0 & \text{αν δεν συμβεί το } A \end{cases}$

$$E(Y) = 1 \cdot P[Y=1] + 0 \cdot P[Y=0] = P[Y=1] = P(A)$$

← προσοχή ανάποδα

$$E(Y) = E\left[E(Y|X)\right]$$

$$E(Y|X=x) = 1\cdot P[Y=1|X=x] + 0\cdot P[Y=0|X=x]$$
$$= P[Y=1|X=x] = P[A|X=x]$$

$$P(A) = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P[A|X=x]\cdot f_X(x)\,dx$$

Άσκηση: Ο χρόνος που χρειάζεται ~~ε...~~ ο A για να διεκπεραιώσει μία διαδικασία $\sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, ο B $\sim \mathcal{E}(\lambda_2)$

Βρείτε την πιθανότητα ο B να διεκπεραιώσει πιο γρήγορα από τον A.

X : ο χρόνος του A $\sim \mathcal{E}(\lambda_1)$

Y : ο χρόνος του B $\sim \mathcal{E}(\lambda_2)$

Ζητάμε $P(X>Y)$

$$P(X>Y) \overset{\Gamma\Theta O\Pi}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X>Y \mid Y=y)\, f_Y(y)\, dy$$

$$P(X>Y \mid Y=y) = P(X>y) = 1 - P(X \leq y) = \underset{= e^{-\lambda_1 y}}{}$$

$$P(X>Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 y} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dy = \boxed{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}$$

Δεσμευμένη Διακύμανση

X, Y δύο τ.μ.

$$Y = y \Rightarrow m(y) = E[X \mid Y = y]$$ αριθμός

ορίζουμε $g(X) = (X - m(y))^2$ τ.μ.

ορίζουμε $\delta(y) = V(X \mid Y = y) = E[g(X) \mid Y = y]$

Δεσμευμένη διακύμανση είναι τὸ $\delta(y)$ όταν $y \to Y$

$$V(X \mid Y)$$ τ.μ.

$Y = y \to E[X \mid Y = y] = m(y) \to$

$E[(X - m(y))^2 \mid Y = y] \to$ κάτι με y

Βάζω σὸ y τὸ Y και έχω

$$V(X \mid Y)$$

<u>Ιδιότητα</u>: $V(X) = E[V(X|Y)] + V[E(X|Y)]$

<u>Απόδειξη</u>: Δείξτε τον παραπάνω τύπο

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad (1)$$

(1) $V(X|Y) = E(X^2|Y) - E^2(X|Y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E[V(X|Y)] = E[E(X^2|Y)] - E[E^2(X|Y)] =$$

$$E[V(X|Y)] = E(X^2) - E[E^2(X|Y)] \quad (2)$$

$$V(E(X|Y)) = E[E^2(X|Y)] - \left(E[E(X|Y)]\right)^2 =$$

$$= E[E^2(X|Y)] - E^2(X) \quad (3)$$

(2) + (3) $E[V(X|Y)] + V[E(X|Y)] = E(X^2) - E^2(X) =$

$$= V(X).$$

<u>Άσκηση</u>: Αν ένα μηχάνημα λειτουργήσει για t ώρες, η μέση τιμή και η διακύμανση των βλαβών είναι $5t$. Αν το μηχάνημα λειτουργεί για τυχαίο αριθμό ωρών t με $t \sim U(8,10)$, βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση των βλαβών.

Ορίζουμε T χρόνο λειτουργίας·

$$T \sim U(8,10) \Rightarrow E(T) = \frac{8+10}{2} = 9$$

$$\Rightarrow V(T) = \frac{(10-8)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

$N(t)$ = ο αριθμός βλαβών σε χρόνο t.

Ζητάμε $E[N(T)]$ και $V[N(T)]$

$$E[N(T)] = E\left[E[N(T)\mid T]\right] = E[5T] = 5E[T] = 5\cdot 9 =$$
$$= 45$$

$$m(t) = E[N(T)\mid T=t] = E[N(t)] = 5t \Rightarrow$$

$$E[N(T)\mid T] = 5T$$

$$V[N(T)] = E\big[V[N(T)\mid T]\big] + V\big[E[N(T)\mid T]\big]$$

$$E[N(T)\mid T] = 5T$$

αλλά

$$V[N(T)\mid T=t] = V[N(t)] = 5t \implies$$

$$V[N(T)\mid T] = 5T$$

$$V[N(T)] = E[5T] + V[5T] =$$

$$= 5E[T] + 25V[T] = 5\cdot 9 + 25\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{160}{3}$$