

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Κατεύθυνση: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΑΝΟΙΞΗ 2020

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

ΟΜΑΔΑ 4η

Άσκηση 1η: Επιλύσατε, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ακριβούς στοχαστικής εξίσωσης, την ΣΔΕ:

$$dX(t) = [t + B^2(t)]dt + 2tB(t)dB(t) \quad , \quad X(0) = a$$

Υπολογίσατε το στοχαστικό διαφορικό $d(tB^2(t))$, αντικαταστήσατε το στην προηγούμενη ΣΔΕ και επιλύσατε την.

Άσκηση 2η: Δίδεται η ΟU-ΣΔΕ: $dX(t) = -\lambda X(t)dt + \sigma dB(t)$. Επιλύσατε την με την μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα. Υπολογίσατε την ποσότητα: $Cov[X(s), X(t)]$, $0 < s < t$.

Άσκηση 3η: Δίδεται η ΣΔΕ:

$$dX(t) = \frac{b - X(t)}{1 - t}dt + dB(t) \quad , \quad X(0) = a$$

Επιλύσατε την με 1) την μέθοδο του γινομένου 2) με την χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα.

Άσκηση 4η: Επιλύσατε την ΣΔΕ:

$$dX(t) = [2tB^3(t) + 3t^2[1 + B(t)]]dt + [3t^2B^2(t) + 1]dB(t) \quad , \quad X(0) = 0$$

Απάντηση: $X(t) = t^2[B^3(t) + 1] + B(t)$

Άσκηση 5η: Επιλύσατε την ΣΔΕ:

$$t^3dX(t) = [3t^2X(t) + t]dt + t^6dB(t) \quad , \quad X(1) = 0$$

Απάντηση: $X(t) = \frac{1}{4} \left(t^3 - \frac{1}{t} \right) + t^3 [B(t) - B(1)]$

Άσκηση 6η: Επιλύσατε την ΣΔΕ: $dX(t) = [3X(t) - 2]dt + e^{3t}dB(t)$

Άσκηση 7η: Η στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ ακολουθεί την ΣΔΕ: $dX(t) = [m - X(t)]dt + a dB(t)$. Δείξτε ότι: $E[X(t)] = m + (X_0 - m)e^{-t}$ και $Var[X(t)] = \frac{1}{2}a^2(1 - e^{-2t})$.

Άσκηση 8η: (ΔΥΣΚΟΛΗ) Επιλύσατε την ΣΔΕ: $dX(t) = aX(t)dB(t)$

Απάντηση: $X(t) = X(0)e^{aB(t) - \frac{a^2}{2}t}$