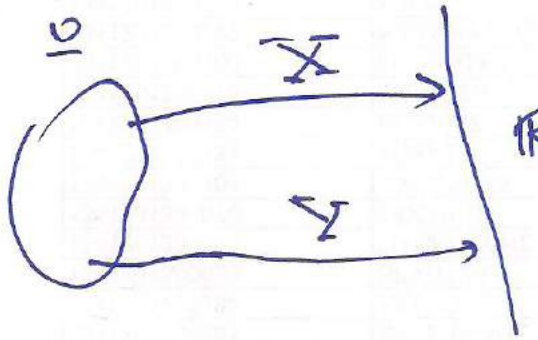
Δισδιάστατες Τυχαίες Μεταβλ.

Διακριτές



$$\boxed{\begin{array}{l} R_{X,Y} : \text{σύνολο τιμών} \\ R_{X,Y} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \end{array}}$$

Η συνάρτηση $f : R_{X,Y} \to \mathbb{R}$ με

$$\boxed{f(x,y) = P(X=x, Y=y)} =$$

$$= P\left(\{\omega \in \Omega, \text{ με } X(\omega)=x,\ Y(\omega)=y\}\right)$$

λέγεται __από κοινού__ συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y.

Ιδιότητες:
$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \text{ αν } (x,y) \in R_{X,Y} \\ f(x,y) \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} f(x,y) = 1 \end{cases}$$

Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής:

$$\boxed{F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)}$$

$$P(X \le x, Y \le y) = \sum_{\substack{(s,t) \in R_{X,Y} \\ s \le x,\ t \le y}} P(X = s, Y = t)$$

Γενικότερα Ισχύει:

$$\boxed{P[(X,Y) \in A] = \sum_{(x,y) \in A} f(x,y)}$$

Περιθώριες Κατανομές

Υπολογισμός των κατανομών των τ.μ. X και Y μέσω της από κοινού κατανομής των (X,Y)

$$f_X(x) = P(X=x) = \sum_{\substack{(x,y)\in R_{X,Y} \\ x \text{ σταθερό}}} f(x,y)$$

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{\substack{(x,y)\in R_{X,Y} \\ y \text{ σταθερό}}} f(x,y)$$

περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας

$$\boxed{F_X(x) = P(X\leq x), \quad F_Y(y) = P(Y\leq y)}$$

περιθώριες συναρτήσεις κατανομής

Ιδιότητες

$$F_X(x) = \sum_{s \le x} f_X(s)$$

$$F_Y(y) = \sum_{t \le y} f_Y(t)$$

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(X, y) = \lim_{n \to +\infty} P(\{X \le x, Y \le n\})$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = \lim_{n \to +\infty} P(\{X \le n, Y \le y\})$$

Δισδιάστατες Συνεχείς τυχ. Μετ.

· Έστωσαν X, Y τ.μ. συνεχείς

$\Gamma \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\boxed{P\left[(X,Y) \in \Gamma\right] = \iint_{\Gamma} f(x,y)\,dx\,dy}$$

$f(x,y)$ από κοινού σ.π.π. των X, Y

Ιδιότητες

① $f(x,y) \geq 0$

② $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

Απο κοινού (Αθροιστική) συνάρτηση κατανομής

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$\boxed{F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)\,ds\,dt}$$

$$\boxed{f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}}$$

Περιθώριες σ.π.π. :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad , \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

Περιθώριες συν. κατανομής:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\,ds = \lim_{y \to +\infty} F(x,y)$$

$$F_Y(x) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} F(x,y)$$

Στοχαστική Ανεξαρτησία δύο τυχαίων μεταβλητών.

Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y λέγονται στοχαστικά ανεξάρτητες, αν τα ενδεχόμενα $\{X \in A\}$, $\{Y \in B\}$ είναι ανεξάρτητα γιά οποιαδήποτε υποσύνολα $A, B \subset \mathbb{R}$. Δηλαδή:

$$\boxed{P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)}$$

Ιδιότητες

- Έστωσαν X, Y τ.μ. με

  $F(x,y)$ από κοινού συνάρτηση κατανομής

  $f(x,y)$ από κοινού σ.π.π.

  $F_X(x), F_Y(y)$ περιθώριες συν. κατανομής

  $f_X(x), f_Y(y)$ περιθώριες σ.π.π.

$$\boxed{X, Y \text{ ανεξάρτητες} \Longleftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y) \\ \\ f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \end{cases}}$$

- X, Y ανεξάρτητες, αν υπάρχουν συναρτήσεις $f_1(x), f_2(y)$ έτσι ώστε:

$$\boxed{f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)} \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

$$F(x,y) = F_1(x)\, F_2(y)$$

Άσκηση: Έστωσαν δύο ταμεία.

X: το πλήθος στην "ουρά", ταμείο A

Y: το πλήθος στην "ουρά", ταμείο B

την ίδια χρονική στιγμή, κάθε ημέρα.

x \ y	0	1	2
0	0.1	0.04	0.02
1	0.08	0.2	0.06
2	0.06	0.14	0.3

Βρείτε:

(1) Την πιθανότητα να περιμένει το πολύ 1 άτομο σε κάθε ταμείο.

(2) Ο ίδιος αριθμός ατόμων στα ταμεία.

(3) Να περιμένουν συνολικά 3 άτομα στα ταμεία.

(4) Την από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

(5) Τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας.

Λύση: ① $P(X \le 1, Y \le 1) =$

$= P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) +$

$+ P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) =$

$= f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) =$

$= 0.1 + 0.04 + 0.08 + 0.2 = \boxed{0.42 = F(1,1)}$

② $P(X=Y) = P(X=Y=0) +$

$+ P(X=Y=1) + P(X=Y=2) =$

$= 0.1 + 0.2 + 0.3 = \boxed{0.6}$

③ $P(X+Y=3) = f(1,2) + f(2,1) =$

$= 0.06 + 0.14 = \boxed{0.2}$

④ $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) =$

$$= \sum_{\substack{s \le x \\ t \le y}} P(X = s, Y = t)$$

π.χ. $F(2,1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) + f(2,0) + f(2,1) = 0 + 0.04 + 0.08 + 0.2 + 0.06 + 0.14 = 0.52$

⑤

$x \backslash y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	0.1	0.04	0.02	0.16
1	0.08	0.2	0.06	0.34
2	0.06	0.14	0.30	0.5
$f_Y(y)$	0.24	0.38	0.38	1

Άσκηση: Η από κοινού σ.π.π. των X και Y είναι $f(x,y)=c(2x+y)$ με $x=0,1,2$, $y=0,1,2,3$

(α) Βρείτε c (β) $P(X=2, Y=1)$

(γ) $P(X\geq 1, Y\leq 2)$ (δ) Είναι X και Y ανεξάρτητες;

Λύση:

$x \backslash y$	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	0	c	$2c$	$3c$	$6c$
1	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$	$14c$
2	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$	$22c$
$f_Y(y)$	$6c$	$9c$	$12c$	$15c$	

(α) $\sum f(x,y)=1 \Rightarrow 42c=1 \Rightarrow \boxed{c=1/42}$

(β) $P(X=2, Y=1)=5c = 5\cdot\frac{1}{42} = \boxed{\frac{5}{42}}$

(γ) $P(X \geq 1, Y \leq 2) = 24c = \frac{24}{42} = \boxed{\frac{4}{7}}$

(δ) $f_X(x) = \begin{cases} 6c = 1/7 & x=0 \\ 1/3 & x=1 \\ 11/21 & x=2 \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 1/7 & , y=0 \\ 3/14 & , y=1 \\ 2/7 & , y=2 \\ 5/14 & , y=3 \end{cases}$

Για να είναι ανεξάρτητες θα πρέπει:

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, για κάθε x, y

ΑΛΛΑ $\left.\begin{array}{l} f(2,1) = 5/42 \\ f_X(2) = \frac{11}{21} \\ f_Y(1) = \frac{3}{14} \end{array}\right\} \Rightarrow f(2,1) \neq f_X(2)\, f_Y(1)$

$\Downarrow$

ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες

Άσκηση: Έστωσαν X, Y τα ποσοστά της αγοράς που κατέχουν δύο ανταγωνιστικά προϊόντα. Αν η από κοινού σ.π.π. των (X,Y) είναι:

$$f(x,y)=\begin{cases} 8(x+y) & 0<x<1/2 \text{ και } 0<y<1/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα προϊόντα να κατέχει ποσοστό $\boxed{\text{μεγαλύτερο}}$ του 25%.

Λύση: A: το προϊόν κατέχει ποσοστό $\leq 25\%$

B: το δεύτ. προϊόν " $\leq 25\%$

$$P(A' \cup B') = P[(A\cap B)'] = 1 - P(A\cap B) =$$
$$= 1 - P\left(X \leq 1/4, Y \leq 1/4\right) = \boxed{1 - F\left(1/4, 1/4\right)}$$

$$F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4}\int_0^{1/4} 8(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{8} \Longrightarrow$$

$$\boxed{P(\dots) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}}$$

Ασκηση: Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των χρόνων ζωής X, Y δύο λαμπτήρων, σε χιλιάδες ώρες, είναι:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-y^2}), & x>0,\ y>0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

1. Να βρεθεί η από κοινού σ.π.π.
2. Να υπολογισθούν οι περιθώριες συν. κατανομής
3. Να υπολογισθούν οι περιθώριες σ.π.π.
4. Είναι X, Y ανεξάρτητες;
5. Ποια η πιθανότητα μετά από 1000 ώρες να μην λειτουργεί κανένας λαμπτήρας;
6. Μετά από 1000 ώρες να μην λειτουργεί τουλάχιστον ένας λαμπτήρας;
7. και οι δύο λαμπτήρες να ζήσουν περισσότερο από 1000 ώρες;
8. Ο συνολικός χρόνος ζωής των δύο λαμπτήρων να είναι περισσότερος από 1000 και λιγότερος από 2000 ώρες;

Λύση: ① $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \, \partial y} = \boxed{4y e^{-2x-y^2}}$

② $F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \underline{(1-e^{-2x})} \cdot (1-0)$

$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = (1-0) \cdot \underline{(1-e^{-y^2})}$

$f_X(x) = \int_0^{+\infty} 4y e^{-2x-y^2} dy = 2e^{-2x} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 2e^{-2s} ds = \int_0^x 2e^{-2s} ds = \boxed{1-e^{-2x}}$

③ $f_X(x) = \int_0^{+\infty} 4y e^{-2x-y^2} dy = \boxed{2e^{-2x}}$

$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} 4y e^{-2x-y^2} dx = \boxed{2y e^{-y^2}}$

ή $f_X(x) = F_X'(x) = 2e^{-2x}$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = 2y e^{-y^2}$

(4) Αφού $f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$, οι τ. μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.

(5), (6), (7) Ορίζουμε:

A = ο πρώτος λαμπτήρας ζεί ≤ 1000 ώρες $\Leftrightarrow$

B = ο δεύτερος λαμπτήρας ζεί ≤ 1000 ώρες

$A = \{X \leq 1\}$, $B = \{Y \leq 1\}$

ζητάμε:

$P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P[(A' \cap B')]$

$P(A) = P(X \leq 1) = F_X(1) = 0.86$

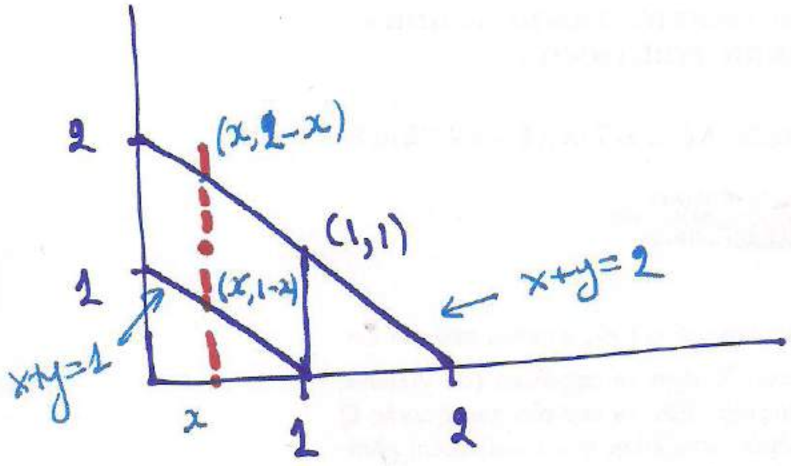
$P(B) = P(Y \leq 1) = F_Y(1) = 0.63$ $\Rightarrow$

$P(A \cap B) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = F(1,1) = \boxed{0.55}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.86 + 0.63 - 0.55 = \boxed{0.94}$

$P[(A' \cap B')] = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = \boxed{0.06}$

⑧ Ζητάμε $P(1 \leq X+Y \leq 2)$



$$\int_0^1 \int_{1-x}^{2-x} 4y e^{-2x-y^2} \, dy \, dx +$$

Int_1^2 Int_0^(2-x)......................... dydx=

$$= 0.475 + 0.04 = \boxed{0.515}$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

$$E\left[h(X,Y)\right]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} h(x,y)\,f(x,y)\\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,h(x,y)\,dx\,dy\end{cases}$$

Ιδιότητες

- $E\left[h_1(X,Y)+h_2(X,Y)\right]=E\left[h_1(X,Y)\right]+E\left[h_2(X,Y)\right]$

- $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$

- Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβ.

ΤΟΤΕ:

$$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y)}$$

- Αν X, Y ανεξάρτητες τυχ. μεταβλητές

ΤΟΤΕ:

$$\boxed{E\left[g(X)h(Y)\right] = E\left[g(X)\right]E\left[h(Y)\right]}$$

- $$\boxed{\begin{gathered} E\left[X / Y = y\right] = E(X) \\ E\left[Y / X = x\right] = E(Y) \end{gathered}}$$

Άσκηση: Η από κοινού σ.π. μίας διακριτής δισδιάστατης τ.μ. (X,Y) δίδεται από τον πίνακα:

$x \backslash y$	-1	0	1	$f_X(x)$
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
0	$1/8$	0	$1/8$	$2/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
$f_Y(y)$	$3/8$	$2/8$	$3/8$	1

Βρείτε $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, είναι ανεξάρτητες;

Λύση: $E(X) = (-1)\cdot\frac{3}{8} + 0\cdot\frac{2}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} = 0$

$E(Y) =$ " $= 0$

$E(XY) = \sum\sum xy f(x,y) = \cdots = 0$

$\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

αλλά $f_X(0) f_Y(0) = \frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8} \neq 0 \neq f(0,0)$

ΟΧΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

Δεσμευμένες Κατανομές

Έστω (X, Y) μία δισδιάστατη τ.μ.

$f(x,y)$ από κοινού σ.π.π.

$f_X(x)$, $f_Y(y)$ οι περιθώριες σ.π.π.

Η δεσμευμένη σ.π.π. του X δοθέντος $Y=y^*$:

$$f_{X|Y}(x|y^*) = P(X=x|Y=y^*) = \frac{f(x,y^*)}{f_Y(y^*)}$$

Η δεσμευμένη σ.π.π του Y δοθέντος $X=x^*$:

$$f_{Y|X}(y|x^*) = P(Y=y|X=x^*) = \frac{f(x^*,y)}{f_X(x^*)}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ με $(x,y^*) \in R_{X,Y}$, διακριτή
$(x^*,y) \in R_{X,Y}$

με $x \in \mathbb{R}$ ή $y \in \mathbb{R}$, συνεχή

Δεσμευμένη αθροιστική κατανομή

$$F_{X|Y}(t)=P\left(X\leq t \,\middle|\, Y=y^*\right)=\sum_{s\leq t} f_{X|Y}(s|y^*)$$

$$F_{Y|X}(t)=P\left(Y\leq t \,\middle|\, X=x^*\right)=\sum_{s\leq t} f_{Y|X}(s|x^*)$$

και

$$F_{X|Y}(t)=P\left(X\leq t \,\middle|\, Y=y^*\right)=\int_{-\infty}^{t} f_{X|Y}(s|y^*)\,ds$$

$$F_{Y|X}(t)=P\left(Y\leq t \,\middle|\, X=x^*\right)=\int_{-\infty}^{t} f_{Y|X}(s|x^*)\,ds$$

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

$$E\left(X \mid Y=y^*\right)=\sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} x\, f_{X|Y}(x|y^*)$$

$$E\left(Y \mid X=x^*\right)=\sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} y\, f_{Y|X}(y|x^*)$$

$$\boxed{E\left[h(Y) \mid X=x^*\right]=\sum_{(x,y)\in R_{X,Y}} h(y)\, f_{Y|X}(y|x^*)}$$

και

$$E\left(Y \mid X=x^*\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{Y|X}(y|x^*)\,dy$$

$$\boxed{E\left[h(Y) \mid X=x^*\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\, f_{Y|X}(y|x^*)\,dy}$$

Άσκηση: Έστωσαν τα δύο Ταμεία προηγούμενης άσκησης. Βρείτε:

$f_{X|Y}(x|0)$, $f_{Y|X}(y|1)$, $f_{X|Y}(x|1)$

$E(Y|X=1)$, $E(X|Y=1)$

Λύση:

$x \backslash y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	0.1	0.04	0.02	0.16
1	0.08	0.2	0.06	0.34
2	0.06	0.14	0.3	0.5
$f_Y(y)$	0.24	0.38	0.38	1

$$f_{X|Y}(x|0) = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)} = \begin{cases} \frac{0.1}{0.24}, & x=0 \\ \frac{0.08}{0.24}, & x=1 \\ \frac{0.06}{0.24}, & x=2 \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f(1,y)}{f_X(1)} = \begin{cases} \frac{0.08}{0.34} = 0.23 & , y=0 \\ \frac{0.2}{0.34} = 0.59 & , y=1 \\ \frac{0.06}{0.34} = 0.18 & , y=2 \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|1) = \frac{f(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} \frac{0.04}{0.38} & , x=0 \\ \frac{0.2}{0.38} & , x=1 \\ \frac{0.14}{0.38} & , x=2 \end{cases}$$

$$E(Y|X=1) = \sum_{y=0}^{2} y\, f_{Y|X}(y|1) =$$

$$= 0(0.23) + 1(0.59) + 2(0.18) = \boxed{0.83}$$

$$E(X|Y=1) = \sum_{x=0}^{2} x\, f_{X|Y}(x|1) = \boxed{1.27}$$

Άσκηση: Αν

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{5}x(x+y) & 0<x<1,\ 0<y<2\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

Βρείτε $f_{Y|X}$, $f_{X|Y}$, $E(X|Y=y^*)$

Λύση:

$$f_X(x)=\int_0^2 \frac{3}{5}x(x+y)\,dy=\frac{6}{5}x(x+1),\quad 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 \frac{3}{5}x(x+y)\,dx=\frac{3y+2}{10},\quad 0<y<2$$

$$\Downarrow$$

$$f_{Y|X}(y|x^*)=\frac{f(x^*,y)}{f_X(x^*)}=\frac{x^*+y}{2(x^*+1)},\quad 0<y<2$$

$$f_{X|Y}(x|y^*)=\frac{f(x,y^*)}{f_Y(y^*)}=\frac{6x(x+y^*)}{3y^*+2},\quad 0<x<1$$

$$E(X|Y=y^*)=\int_0^1 x\,\frac{6x(x+y^*)}{3y^*+2}\,dx=\dots$$

Ιδιότητες Δεσμευμένης Μέσης Τιμής

$$\begin{tikzcd} \underline{\Omega} \arrow[r, "X \text{ τ.μ.}"] \arrow[rr, bend right, "g(X) \text{ τ.μ.}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g(.)"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$E[X|Y=y] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longrightarrow m(y) = E[X|Y=y]$$

$\Rightarrow$ Άρα η $m(Y)$ είναι τ.μ. για κάθε Y τ.μ.

$m(Y)$: δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθείσης της Y

$$\boxed{E(X|Y)}$$ ← τυχαία μεταβλητή

$$E[m(Y)] = E[E(X|Y)]$$

Θεώρημα:

$$\boxed{\begin{aligned} E[E(X|Y)] &= E(X) \\ E[E(Y|X)] &= E(Y) \end{aligned}}$$

Απόδειξη:

$$E[E(X|Y)] = E[m(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} m(y) f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx \right)}_{m(y)} f_Y(y)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_Y(y)} x f(x,y) f_Y(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\,dy = \boxed{E(X)}$$

Δεσμευμένη Διακύμανση

Έστω η συνάρτηση $g(w) = (w - m(y))^2$

, για συγκεκριμένο y. Η

$$g(X) = (X - m(y))^2 \quad \text{είναι τ.μ.}$$

$$m(y) = E(X \mid Y=y)$$

Η ποσότητα $E[g(X) \mid Y=y] = \delta(y)$

λέγεται <u>δεσμευμένη διακύμανση της</u>

<u>X δοθέντος $Y=y$.</u> $V(X \mid Y=y)$

Η τυχαία μεταβλητή $\delta(Y)$ λέγεται

<u>δεσμευμένη διακύμανση της X δοθέντος</u>

<u>του Y</u>

$$\boxed{V(X \mid Y)}$$ τυχαία μεταβλητή

Ιδιότητες

- $E\left[E[g(X) \mid Y]\right] = E[g(X)]$
- $E\left[E[h(Y) \mid X]\right] = E[h(Y)]$
- $E(\alpha X + \beta \mid Y = y) = \alpha E(X \mid Y = y) + \beta$
- $E[g(X) + h(X) \mid Y = y] = E[g(X) \mid Y = y] + E[h(X) \mid Y = y]$

$$\boxed{V(X) = E[V(X \mid Y)] + V[E(X \mid Y)]}$$

Γενικευμένο Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος

Έστω ένα πείραμα τύχης, A ένα ενδεχόμενο του και X μία τυχαία μεταβλητή.

(α). Αν η X είναι διακριτή με σ.π. $f_X(x)$:

$$\boxed{P(A)=\sum_{x\in R_X} P(A|X=x)\, f_X(x)}$$

(β). Αν η τ.μ. X είναι συνεχής με σ.π.π. $f_X(x)$:

$$\boxed{P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(A|X=x)\, f_X(x)\,dx}$$

Άσκηση: Αποδείξατε την σχέση:

$$V(X) = E\left[V(X|Y)\right] + V\left[E(X|Y)\right]$$

Λύση:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(X|Y) = E(X^2|Y) - E^2(X|Y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left(V(X|Y)\right] = \underline{E\left[E(X^2|Y)\right]} - E\left[E^2(X|Y)\right] = \underline{E(X^2)} - E\left[E^2(X|Y)\right] \quad (1)$$

και

$$V\left(E(X|Y)\right) = E\left[E^2(X|Y)\right] - \left(E\left[E(X|Y)\right]\right)^2 =$$

$$= E\left[E^2(X|Y)\right] - \underline{E^2(X)} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow E\left(V(X|Y)\right] + V\left(E[X|Y]\right) = E(X^2) - E^2(X) =$$

$$= V(X)$$

//

Άσκηση: Αποδείξατε το Γενικευμένο Θεώρημα Ολικής Πιθανότητος:

Λύση: Έστωσαν:

· Ένα πείραμα τύχης

A, ένα ενδεχόμενο σχετικό με το πείραμα

X, μία συνεχής τ.μ. σχετική με το πείραμα

$f_X(x)$, συνάρτηση πιθανότητος

Ορίζουμε την τ.μ.

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{αν συνέβη το ενδεχόμενο } A \\ 0, & \text{αν δεν συνέβη το ενδεχόμενο } A \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(Y) &= 1 \cdot P(Y=1) + 0 \cdot P(Y=0) = \\ &= P(Y=1) = P(A) \end{aligned}}$$

$$E(Y) = E\left[E(Y|X)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$E\left[E(Y|X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X=x)\, f_X(x)\,dx$$

αλλά

$$E(Y|X=x) = 1 \cdot P\left[Y=1 \middle| X=x\right] + 0 \cdot P\left[Y=0 \middle| X=x\right] = P\left[Y=1 \middle| X=x\right] = P(A|X=x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A|X=x)\, f_X(x)\,dx}$$

Άσκηση: Μία διδιάστατη κατανομή έχει σ.π.π:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x+2y), & 0<x,y<1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

Βρείτε $E(X|Y)$ και $E[E(X|Y)]$

Λύση: $E(X|Y) = m(Y)$

$$m(y) = E[X|Y=y]$$

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

$$f_{X|Y} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx = \int_0^1 f(x,y)\, dx = \boxed{\frac{4y+1}{3}}$$

$$\Rightarrow m(y) = \int_0^1 \frac{2x^2+4xy}{1+4y}\, dx = \frac{2(3y+1)}{3(4y+1)} \quad 0<y<1$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X|Y) = m(Y) = \frac{2(3Y+1)}{3(4Y+1)} \text{ τ.μ.}}$$

$$E[E(X|Y)] = E(X)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \frac{2(x+1)}{3}, \quad 0<x<1$$

$$\Rightarrow E[E(X|Y)] = \int_0^1 x\,\frac{2}{3}(x+1)\,dx =$$

$$\boxed{= \frac{5}{9}}$$

Άσκηση: $N(t)$ ο αριθμός των "ενδιαφερομένων"
$M(t)$ ο αριθμός των "συμμετεχόντων"

$\Rightarrow$ σε διάστημα $[0,t]$

Αν κάθε "ενδιαφερόμενος" "συμμετέχει" με πιθανότητα p και $E[N(t)] = \lambda t$, βρείτε $E[M(t)]$.

Λύση: $$E[M(t)] = E\left[E\left(M(t) \mid N(t)\right)\right] \quad (1)$$

$$E\left(M(t) \mid N(t)\right) = m(N(t))$$

$$m(x) = E\left[M(t) \mid N(t) = x\right] \quad (2)$$

$\Downarrow$

Αν είναι γνωστό ότι $N(t) = x$ τότε $M(t) \sim b(x, p)$

άρα $E\left[M(t) \mid N(t) = x\right] = xp \xRightarrow{(2)}$

$E\left[M(t) \mid N(t)\right] = N(t)p \xRightarrow{(1)}$

$$E[M(t)] = E[N(t)p] = pE[N(t)] = \boxed{p\lambda t.}$$

Ασκηση: Υπολογίσατε το μέσο πλήθος των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι την εμφάνιση δύο διαδοχικών επιτυχιών σε μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli.

Λύση: $E(X) = E[E(X|Y)] =$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} E(X|Y=i)\,P(Y=i)$$

αλλά

$$E(X|Y=i) = \begin{cases} i+E(X), & i=1,2 \\ 2, & i\geq 3 \end{cases}$$

Εξήγηση: • Οταν $i=1$ η πρώτη δοκιμή θα είναι αποτυχία "υποχρεωτικά"

• Οταν $i=2$ οι δύο πρώτες δοκιμές είναι ΕΑ άρα θα γίνουν αυτές οι δύο και μετά οι υπόλοιπες

• Οταν $i=3$, οι τρεις πρώτες δοκιμές είναι ΕΕΑ άρα δύο δοκιμές αρκούν.

X: τό πλήθος των δοκιμών μέχρι καί τήν εμφάνιση δύο Ε.

Y: το πλήθος των δοκιμών μέχρι καί τήν εμφάνιση μίας Α.

$$P(Y=i) = qp^{i-1}$$ (Γεωμετρική)

$$\Downarrow$$

$$E(X) = [1+E(X)]q + [2+E(X)]qp + 2qp^2(1+p+p^2+\dots)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1+p}{p^2}}$$

Άσκηση: Ο χρόνος που χρειάζεται ο υπάλληλος Α για να διεκπεραιώσει μία διαδικασία $\sim \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, x>0$.

Ο υπάλληλος $B \sim \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, y>0$.

Βρείτε την πιθανότητα ο Β να διεκπεραιώσει πιο "γρήγορα" από τον Α.

Λύση: Ορίζουμε:

X : ο χρόνος του Α, Y: ο χρόνος του Β

Ζητάμε $P(X>Y)$

$$P(X>Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(X>Y \mid Y=y)\, f_Y(y)\, dy$$

αλλά

$$P(X>Y \mid Y=y)=P(X>y \mid Y=y)=$$

$$= P(X>y) = 1 - P(X \leq y) =$$

$$= 1 - F_{X_1}(y) = e^{-\lambda_1 y}$$

$$\boxed{F(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$P(X>Y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 y} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \, dy =$$

$$= \lambda_2 \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} \, dy = \boxed{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}$$

Άσκηση: Αν μηχάνημα λειτουργήσει για t ώρες, η μέση τιμή και η διακύμανση του αριθμού των βλαβών είναι 5t. Αν το μηχάνημα λειτουργεί για έναν τυχαίο αριθμό ωρών μεταξύ 8 και 10 ωρών, βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση του αριθμού των βλαβών.

Λύση: Ορίζουμε:

T: ο χρόνος λειτουργίας

$N(t)$: ο αριθμός των βλαβών σε t ώρες λειτουργίας

Ζητάμε: $E[N(T)]$ και $V[N(T)]$

Έχουμε: $E\left[N(t)\right] = V\left[N(t)\right] = 5t$

και $E(T) = \frac{10+8}{2} = 9$, $V(T) = \frac{(10-8)^2}{12} = \frac{1}{3}$

$$E\left[N(T)\right] = E\left[E\left[N(T) \mid T\right]\right] = E\left[m(T)\right]$$

$$E\left[N(T) \mid T = t\right] = m(t) = E\left[N(t)\right] = 5t$$

$$\Longrightarrow \boxed{E\left[N(T)\right] = E\left[5T\right] = 5E\left[T\right] = 45.}$$

$$V\left[N(T)\right] = E\left[V(N(T) \mid T)\right] + V\left[E(N(T) \mid T)\right] \Longrightarrow$$

$$V(N(T) \mid T = t) = V(N(t)) = 5t$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} V\left[N(T)\right] &= E\left[5T\right] + V\left[5T\right] = \\ &= 5E\left[T\right] + 25V\left[T\right] = \frac{160}{3} \end{aligned}}$$

ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right]$$

$$\mu_x = E(X) \; , \; \mu_y = E(Y)$$

Ιδιότητες

- $Cov(X,X) = V(X)$, • $Cov(Y,Y) = V(Y)$
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

- $Cov(\alpha X+\beta, \gamma Y+\delta) = \alpha\gamma \, Cov(X,Y)$
- $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$
- $Cov(X, Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z)$

· Όταν $Cov(X,Y)>0 \Rightarrow$

X,Y θετικά συσχετισμένες

Όταν $Cov(X,Y)<0 \Rightarrow$

X,Y αρνητικά συσχετισμένες

Όταν $Cov(X,Y)=0 \Rightarrow$

X,Y ασυσχέτιστες

Αν δύο τ.μ. είναι ανεξάρτητες τότε θα είναι και ασυσχέτιστες.

ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ.

Άσκηση: $(X,Y) \sim f(x,y)$ με

$$f(x,y)=\begin{cases} 2 & , \text{ αν } 0<x<y<1 \\ 0 & , \text{ αλλού} \end{cases}$$

Βρείτε $Cov(X,Y)$

Λύση: $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_x^1 2\,dy = 2(1-x)\,,\quad 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^y 2\,dx = 2y\,,\quad 0<y<1$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\int_0^1 x\,2(1-x)\,dx=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy=\int_0^1 y\cdot 2y\,dy=\frac{2}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^y 2xy\,dx\,dy=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{36}}$$

Ροπογεννήτριες

$$\boxed{M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)}$$

λέγεται ροπογεννήτρια της τ.μ. X

Ιδιότητες

- $\boxed{E(X^r) = M^{(r)}(0)}$

- $M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E(X^r)}{r!} t^r$

- $\boxed{Y = \alpha X + B \Rightarrow M_Y(t) = e^{Bt} M_X(at)}$

- Αν $M_X(t) = M_Y(t)$ για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ $\Rightarrow$ X, Y έχουν ίδια ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Άσκηση: $X \sim f(x) = \frac{4-x}{6}$, $x=1,2,3$

Βρείτε $M(t)$.

Λύση: $M(t) = E\left(e^{tX}\right) =$

$= e^{t} f(1) + e^{2t} f(2) + e^{3t} f(3) =$

$= \boxed{\frac{3e^{t} + 2e^{2t} + e^{3t}}{6}}$

Άσκηση: Η X έχει $M(t) = \frac{1}{81}\left(e^{t}+2\right)^{4}$

Βρείτε $E(X)$, $V(X)$.

Λύση: $E(x) = M'(0) = \frac{1}{81} 4 \left(e^{t}+2\right)^{3} \cdot e^{t}\Big|_{t=0} = \frac{4}{3}$

$E(X^2) = M''(0) = \ldots\ldots = \frac{8}{3}$

$V(x) = E(X^2) - E^2(x) = \frac{8}{9}$

Άσκηση: Βρείτε την ροπογεννήτρια της διωνυμικής κατανομής: $b(\nu, p)$

Λύση: $M(t) = E(e^{tX}) =$

$$= \sum_{x=0}^{\nu} e^{tx}\binom{\nu}{x} p^{x} q^{\nu-x} = \sum_{x=0}^{\nu} \binom{\nu}{x} (e^{t}p)^{x} q^{\nu-x} =$$

$$= \boxed{(pe^{t}+q)^{\nu}}$$

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \sum_{x=0}^{\nu} \binom{\nu}{x} \alpha^{x} \beta^{\nu-x}$$

$$M'(0) = \nu\left(pe^{t}+q\right)^{\nu-1} pe^{t}\Big|_{t=0} = \nu\underbrace{(p+q)^{\nu-1}}_{=1^{\nu-1}} p = \nu p$$

$$M''(0) = \ldots\ldots \Big|_{t=0} = \nu p + \nu(\nu-1)p^{2} = E(X^{2})$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^{2}) - E^{2}(X) = \nu p q$$

Άσκηση: Βρείτε την ροπογεννήτρια της Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$.

Λύση: $M(t) = E(e^{tX}) =$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = \boxed{e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t}}$$

$$= \boxed{e^{\lambda e^t - \lambda}}$$

$$M'(t) = e^{\lambda e^t - \lambda} (\lambda e^t - \lambda)' = e^{\lambda e^t - \lambda} \cdot \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda \quad //$$

Άσκηση: Βρείτε την ροπογεννήτρια της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Λύση: $M(t) = E\left(e^{tX}\right) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t^2/2 - \frac{1}{2}(x-t)^2} dx =$$

$$= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x-t)^2} dt = \boxed{e^{t^2/2}}$$

η $X - t \sim N(t,1) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \dots = 1$

Άσκηση: Βρείτε την ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομής, $N(\mu,\sigma^2)$

Λύση: $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$\Longrightarrow M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

αλλά $X = \sigma Z + \mu \Longrightarrow \boxed{M_X = e^{\mu t} M_Z(\sigma t)}$

$$\Longrightarrow M_X = e^{\mu t} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \boxed{e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$

Άσκηση: Βρείτε την σ.π. της διακριτής τμ. X, άν $M(t) = \dfrac{3+2e^t}{5}$

Λύση:
$$\left.\begin{array}{l} M(t) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}e^t \\ M_{\text{ΔΙΩΝΥΜ}} = (q + pe^t)^\nu, \quad p+q=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$X \sim b\left(\nu, \frac{2}{5}\right)$$ Διωνυμική μέ $p = \dfrac{2}{5}$.

Άσκηση: Αν $M_X(t) = e^{t+2t^2}$, βρείτε $P(-1 < X < 2)$.

Λύση: $e^{t+2t^2} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ με $\mu = 1$, $\sigma = 2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \sim N(1, 2^2) \Longrightarrow$

$$P(-1 < X < 2) = P\left(\frac{-1-1}{2} < \frac{X-1}{2} < \frac{2-1}{2}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 1/2) = \Phi(1/2) - \Phi(-1) = \underline{0.5328}$$

$\boxed{\text{Πιθανογεννήτριες}}$

X τ.μ. διακριτή

$$\boxed{P_x(t) = E(t^x)}$$

πιθανογεννήτρια της X

Ιδιότητες:

- $$\boxed{P(X=r) = \frac{P^{(r)}(0)}{r!}}$$
- $E\left[X(X-1)\dots(X-r+1)\right] = P^{(r)}(1)$
- $\boxed{\text{Αν } X, Y \text{ τ.μ. διακριτές με } P_X(t) = P_Y(t) \Rightarrow \text{οι τ.μ. } X, Y \text{ έχουν την ίδια κατανομή.}}$
- Αν $Y = \alpha X + \beta \Rightarrow P_y(t) = t^{\beta} P_x(t^{\alpha})$
- $\boxed{M_X(t) = P_X(e^t) \quad , \quad P_X(t) = M_X(\ln t)}$

ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Έστωσα X, Y τ.μ. $\Rightarrow$ η σ.π.π της $U = X + Y$ είναι:

X, Y συνεχείς
$$f_U(u) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-y) f_Y(y)\, dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(u-x)\, dx \end{cases}$$

X, Y διακριτές
$$f_U(u) = \begin{cases} \sum_{y \in R_Y} f_X(u-y) f_Y(y) \\ \sum_{x \in R_X} f_X(x) f_Y(u-x) \end{cases}$$

Άσκηση: X, Y ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κατανομές Poisson με παραμέτρους λ_1, λ_2. Βρείτε την σ.π.πιθαν. (κατανομή) της $X+Y$.

Λύση: $X \sim e^{-\lambda_1} \dfrac{\lambda_1^x}{x!}$, $Y \sim e^{-\lambda_2} \dfrac{\lambda_2^y}{y!}$

Αν $U = X + Y \Rightarrow$

$$f_U(u) = \sum_{x=0}^{u} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{x!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{u-x}}{(u-x)!}$$

$$\binom{u}{x} = \frac{u!}{x!(u-x)!} \Rightarrow \frac{1}{x!(u-x)!} = \frac{1}{u!}\binom{u}{x}$$

$$\Rightarrow f_U(u) = \frac{1}{u!} e^{-\lambda_1+\lambda_2} \sum_{x=0}^{u} \binom{u}{x} \lambda_1^x \lambda_2^{u-x} =$$

$$= \frac{1}{u!} e^{-\lambda_1+\lambda_2} (\lambda_1+\lambda_2)^u = \boxed{\text{Poisson με παράμετρο } \lambda_1+\lambda_2}$$

Μέση Τιμή, Διασπορά, Συνδιακύμανση

- $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$

- $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,Cov(X,Y)$

- $V\left(\sum_{i=1}^{\nu} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{\nu} a_i^2 V(X_i)+$
$$+\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i\neq j} a_i a_j\, Cov(X_i,X_j)$$

- Αν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ είναι ασυσχέτιστες, τότε:

$$\boxed{V(X_1+X_2+\cdots+X_\nu)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_\nu)}$$

Αν $X_1, X_2, X_3, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 και N μία θετική διακριτή τ.μ. ανεξάρτητη από τις $X_1, X_2, \dots$, τότε:

$$\boxed{\begin{aligned} E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= E(N)\mu \\ V\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) &= E(N)\sigma^2 + \mu^2 V(N) \end{aligned}}$$

Αν $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0 \Rightarrow E(N) = V(N) = \lambda$

$\Rightarrow E(S_N) = \lambda\mu$

$V(S_N) = \lambda(\sigma^2 + \mu^2)$

Ασκηση: Μέσα σε ένα προϊόν τοποθετείται ένα κουπόνι. Υπάρχουν N κουπόνια. Η πιθανότητα να βγεί κάποιο απο αυτά είναι η ίδια. Αν κάποιος αγοράσει v τεμάχια απο το προϊόν, ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός διαφορετικών κουπονιών που θά συλλέξει;

Λύση: X : το πλήθος των διαφορετικών κουπονιών που θα συλλεχθούν.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν τουλάχιστον ένα κουπόνι τύπου } i \text{ βρέθηκε σε } v \text{ τεμάχια} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

προφανώς $\quad X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$

$$\Downarrow$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots +$$

$$+ E(X_N)$$

όπως

$$E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + 0 \cdot P(X_i = 0) =$$

$$= P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) =$$

$$= 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{\nu}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E(X) = N\left[1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{\nu}\right]}$$

Άσκηση: Ένα ζάρι ρίχνεται ν φορές. Να υπολογισθεί η συνδιακύμανση του πλήθους που εμφανίζεται το 1 και του πλήθους εμφανίσεων του 6.

Λύση: Ορίζουμε τις τ.μ.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν στην } i\text{-ρίψη ήλθε } 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν στην } i\text{-ρίψη ήλθε } 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$, το πλήθος των 1

$Y = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i$, το πλήθος των 6

$$Cov(X,Y) = Cov\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i, \sum_{j=1}^{\nu} Y_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} Cov(X_i, Y_j) =$$

ΕΠΕΙΔΗ Xι Y_j ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ, Cov(Xi,Yj) =0, ΓΙΑ i ΔΙΑΦΟΡΟ ΤΟΥ j

$$= \sum_{i=1}^{\nu} Cov(X_i, Y_i)$$

$$Cov(X_i, Y_i) = E(X_i Y_i) - E(X_i)E(Y_i) =$$

$$= 0 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Cov(X,Y) = -\frac{\nu}{36}}$$

Άσκηση: Αν N τ.μ. να αποδειχθεί ο τύπος: $V\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N)\sigma^2 + \mu^2 V(N)$

Λύση: Ορίζουμε:

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

$$E[S_N] = E\left[E(S_N|N)\right] = E(N\mu) = \boxed{E(N)\mu}$$

αλλά $E(S_N|N=\nu) = E(X_1 + \cdots + X_\nu) = \nu\mu$

$$V(S_N) = E\left[V(S_N|N)\right] + V\left[E(S_N|N)\right] =$$

$$= E(N\sigma^2) + V(N\mu) = E(N)\sigma^2 + \mu^2 V(N)$$

$$V(S_N|N=\nu) = V(X_1 + \cdots + X_\nu) = \nu\sigma^2$$

$$\Rightarrow V(S_N|N) = N\sigma^2$$

Άσκηση: Μια εταιρεία έχει N options, κάποια από τα οποία λήγουν σε μια ημέρα. Ο αριθμός των options που λήγουν είναι τ.μ. με μέση τιμή 1000. Ένα option έχει πιθανότητα 0.5 για κέρδος 10000 και πιθανότητα 0.4 για ζημία 8000. Να βρεθεί το αναμενόμενο κέρδος.

Λύση: Έστω X_i η τ.μ. που εκφράζει το κέρδος από το i-option

$$E(X_i) = 10000 \cdot 0.5 - 8000 \cdot 0.4 = 1800$$

Συνολικό Κέρδος $= X_1 + X_2 + \cdots + X_N$

$$E(X_1 + \cdots + X_N) = E(N) \cdot E(X_i) =$$

$$= 1000 \cdot 1800 = \underline{1.800.000}$$

Άσκηση: Εταιρεία δουλεύει 12 ώρες. Οι πελάτες φθάνουν ακολουθώντας κατανομή Poisson με $\lambda = 12$ ανά ώρα. Η πιθανότητα να αγοράσει ο πελάτης είναι 0.333. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός πωλήσεων.

Λύση: Ορίζουμε την τ.μ. X_i:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο πελάτης } i \text{ αγόρασε κάτι} \\ 0, & \text{όχι} \end{cases}$$

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0(1-p) = 1 \cdot 0.333 = 0.333$$

$$\text{αριθμός πωλήσεων} = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

$N \sim \mathcal{P}(12) \Rightarrow$ μέση τιμή 12 / ώρα $\Rightarrow$

$$E(N) = 12 \cdot 12 = 144 \Rightarrow$$

$$E(\text{αρ. πωλήσεων}) = E(N) \cdot E(X_i) = 144 \cdot 0{,}333 =$$

$$= \boxed{48}$$

Γεννήτριες

Έστωσαν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες τ.μ. και $S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu$

$$\boxed{M_{S_\nu}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdots M_{X_\nu}(t)}$$

Έστωσαν $X_1, \ldots, X_\nu$, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και N τ.μ. ανεξάρτητη των X_i τότε:

$$\boxed{M_{S_N}(t) = E\left[(M_X(t))^N\right]}$$

όπου $S_N = X_1 + \cdots + X_N$, $M_X(t)$ κοινή ροπογεννήτρια

πιθανογεννήτρια:

$$\boxed{P_{S_\nu}(t) = P_{X_1}(t)\, P_{X_2}(t) \cdots P_{X_\nu}(t)}$$

Έστωσαν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τ.μ. ανεξάρτητες και ισόνομες. N μία θετική διακριτή τ.μ. ανεξάρτητη των X_i. Αν

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

και $M_X(t)$: η κοινή ροπογεννήτρια

$P_N(t)$: η πιθανογεννήτρια της N

$$\Longrightarrow \boxed{M_{S_N}(t) = P_N\big(M_X(t)\big)}$$

αν $P_X(t)$: η κοινή πιθανογεννήτρια των X_i

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P_{S_N}(t) = P_N\big(P_X(t)\big)}$$

Κατανομές Αθροίσματος

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες τ.μ και

$S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu$, τότε:

- Αν $X_1 \sim b(n_1, p)$, $X_2 \sim b(n_2, p)$ ... ... $X_\nu \sim b(n_\nu, p)$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{S_\nu \sim b(n_1 + n_2 + \cdots + n_\nu, p)}$$

- Αν $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, ..., $X_\nu \sim \mathcal{P}(\lambda_\nu)$

$$\Rightarrow \boxed{S_\nu \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\nu)}$$

- Αν $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, ..., $X_\nu \sim N(\mu_\nu, \sigma_\nu^2)$

$$\Rightarrow \boxed{S_\nu \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\nu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_\nu^2)}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \mu_i, \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Άσκηση: Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια της διωνυμικής κατανομής.

Λύση: Έστωσαν οι ανεξάρτητες τ.μ.

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{ με } P(X_i=1) = p_i \\ 0 & , \text{ με } P(X_i=0) = q_i \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$P_{X_i}(t) = E\left(t^{X_i}\right) = t^0 P(X_i=0) + $$

$$+ t^1 P(X_i=1) = \boxed{q_i + t p_i} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{S_\nu}(t) = \prod_{i=1}^{\nu} (q_i + t p_i)}$$

Αν $p_1 = p_2 = \cdots = p_\nu = p \Longrightarrow$

$S_\nu \sim b(1+1+1+\cdots+1, p) = b(\nu, p)$ και

$$\boxed{P_{S_\nu}(t) = (q + tp)^\nu}$$

Άσκηση: Σε μία ασφαλιστική εταιρεία, ο αριθμός των αποζημιώσεων στην διάρκεια μιας εβδομάδος είναι μία τ.μ. N με συνάρτηση πιθανότητος: $f_N(\nu)=P(N=\nu)=q^\nu p$, $\nu=0,1,2,\dots$ Οι αποζημιώσεις $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια και η πιθανογεννήτρια του συλλογικού κινδύνου:

$$S_N=X_1+X_2+\cdots+X_N$$

Λύση: Βρίσκουμε κατ' αρχάς την ροπογεννήτρια και την πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής N.

$$M_N(t)=E\left(e^{tN}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{t\nu}q^\nu p=$$

$$=p\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(e^t q\right)^\nu=\boxed{\frac{p}{1-e^t q}} \Longrightarrow$$

$$P_N(t) = M_N(\ln t) = \boxed{\frac{p}{1-q}}$$

πάρα,

$$P_{S_N}(t) = P_N\left(P_X(t)\right) = \boxed{\frac{p}{1-qP_X(t)}}$$

$$M_{S_N}(t) = P_N\left(M_X(t)\right) = \boxed{\frac{p}{1-qM_X(t)}}$$

Αν $X \sim \lambda e^{-\lambda x} \Longrightarrow$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda \quad \Longrightarrow P_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - \ln t}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{S_N}(t) = \frac{p}{1-q\frac{\lambda}{\lambda-\ln t}}}, \boxed{M_{S_N}(t) = \frac{p}{1-q\frac{\lambda}{\lambda-t}}}$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Έστωσαν $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μεταβλητές, με $X_i \sim (\mu, \sigma^2)$. Ορίζουμε:

$$S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_\nu$$

$$Z_\nu = \frac{S_\nu - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}}$$

Η Z_ν, συγκλίνει για $\nu \to +\infty$ στην συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$, δηλαδή:

$$\boxed{\lim_{\nu \to +\infty} P(Z_\nu \leq x) = \Phi(x)}$$

Πόρισμα: Ο δειγματικός μέσος $\overline{X}_\nu$ ακολουθεί ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή $N(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu})$.

Πόρισμα: Το άθροισμα S_ν ακολουθεί ασυμπτωτικά την $N(\nu\mu, \nu\sigma^2)$.

Πόρισμα: Αν $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε η ακολουθία:

$$Z_\nu = \frac{\overline{X}_\nu - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}}$$

συγκλίνει κατά κατανομή στην τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$.

Άσκηση: Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή από $(-0.05, 0.05)$. Ποια είναι η πιθανότητα το σφάλμα μέτρησης για το άθροισμα 100 μετρήσεων να είναι, κατ' απόλυτη τιμή, μικρότερο του 0.25;

Λύση: X_i: σφάλμα στην i-μέτρηση

$$X_i \sim U(-0.05, 0.05) \Longrightarrow$$

$$E(X_i) = \frac{-0.05+0.05}{2} = 0, \quad V(X_i) = \frac{(-0.05-0.05)^2}{12} = \frac{1}{1200}$$

$$S_{N=100} = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$$

$$P(|S_{100}| < 0.25) = P(-0.25 < S_{100} < 0.25) \Longrightarrow$$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\Longrightarrow} P\left(\frac{-0.25-0}{\sqrt{\frac{1}{1200}}\sqrt{100}} < \frac{S_{100} - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}} < \frac{0.25-0}{\sqrt{\frac{1}{1200}}\sqrt{100}}\right) =$$

$$= P(-0.87 < Z_{100} < 0.87) = \Phi(0.87) - \Phi(-0.87) =$$

$$\boxed{= 0.62}$$

Άσκηση: Έστωσαν δύο δείγματα:

$X_1, X_2, \dots, X_{25}$ με $X_i \sim N(0,16)$ και

$Y_1, Y_2, \dots, Y_{25}$ με $Y_i \sim N(1,9)$

Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(\bar{X} > \bar{Y})$.

Λύση: Από πόρισμα ΚΟΘ $\Rightarrow$

$$\bar{X} \sim N\left(0, \frac{16}{25}\right), \bar{Y} \sim N\left(1, \frac{9}{25}\right) \Rightarrow$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(0-1, \frac{16}{25} + \frac{9}{25}\right) = N(-1, 1)$$

$$\Rightarrow P(\bar{X} > \bar{Y}) = P(\bar{X} - \bar{Y} > 0) =$$

$$= P\left[\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(-1)}{\sqrt{1}} > \frac{0-(-1)}{\sqrt{1}}\right] =$$

$$= P[Z > 1] = 1 - P[Z \leq 1] =$$

$$= 1 - \Phi(1) = \boxed{0.1587}$$

Άσκηση: Στο παιχνίδι της ρουλέττας η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης είναι $\frac{18}{37}$. Αν σε κάθε παιχνίδι ο παίκτης κερδίζει ± 1 ευρώ, πόσα παιχνίδια πρέπει να παίζονται, ώστε το καζίνο με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ να κερδίζει τουλάχιστον α ευρώ;

Λύση: X_i : κέρδος στο i-παιχνίδι

$$X_i = \begin{cases} 1, & p = \frac{19}{37} \\ -1, & p = \frac{18}{37} \end{cases} \Rightarrow \quad E(X_i) = \frac{1}{37}, \quad V(X_i) = 1 - \left(\frac{1}{37}\right)^2 = \sigma^2 \simeq 1$$

κέρδος καζίνου $= S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$

$$P(S_N \geq a) \geq 1/2 \xrightarrow{\text{ΚΟΘ}} P\left(Z \geq \frac{\alpha - \nu \cdot \frac{1}{37}}{\sqrt{\nu} \cdot \sigma}\right) \geq 1/2$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\alpha - \nu \, 1/37}{\sqrt{\nu}}\right) \geq 1/2 \Rightarrow \frac{\alpha - \frac{\nu}{37}}{\sqrt{\nu}} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{37\alpha \geq \nu}$$

Άσκηση: Ασφαλιστική εταιρεία θέλει να εκτιμήσει το μέσο ύψος μ των ετήσιων απαιτήσεων. Παίρνει δείγμα ν ασφαλισμένων και υπολογίζει τον μέσο όρο. Αν οι απαιτήσεις είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και έχουν διακύμανση 256, πόσο πρέπει να είναι το ν ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 99%, η εκτίμηση να μην απέχει από τον πραγματικό θεωρητικό μέσο, περισσότερο από 3 ευρώ;

Λύση: X_i απαιτήσεις ανά έτος του i-ασφαλισμένου.

$$E(X_i)=\mu \quad , \quad V(X_i)=256=16^2$$

Σύνολο ετησίων απαιτήσεων:

$$S_\nu = X_1+X_2+\dots+X_\nu$$

Ζητάμε ν, έτσι ώστε:

$$P\left(\left|\frac{S_\nu}{\nu}-\mu\right|<3\right)\geq 0.99 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-3<\frac{S_\nu}{\nu}-\mu<3\right)\geq 0.99 \overset{\text{ΚΟΘ}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-3\nu}{16\sqrt{\nu}}<\underbrace{\frac{S_\nu-\mu\nu}{\sigma\sqrt{\nu}}}_{Z_\nu}<\frac{3\nu}{16\sqrt{\nu}}\right)\overset{\text{ΚΟΘ}}{=}$$

$$=\Phi\left(\frac{3\sqrt{\nu}}{16}\right)-\Phi\left(\frac{-3\sqrt{\nu}}{16}\right)=\boxed{2\Phi\left(\frac{3\sqrt{\nu}}{16}\right)-1}$$

$$\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{3\sqrt{\nu}}{16}\right)-1\geq 0.99 \Rightarrow \Phi\left(\frac{3\sqrt{\nu}}{16}\right)\geq 0.995$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{3\sqrt{\nu}}{16}\right)\geq \Phi(2.58) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{\nu}}{16}\geq 2.58 \Longrightarrow \boxed{\nu\geq 189.3}$$

Άσκηση: Αν η $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson με λ), δείξατε ότι:

$$P(Y \le y) \simeq \Phi\left(\frac{y-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Λύση: Θεωρούμε τις τ.μ. $X_i \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

$$\Longrightarrow E(X_i) = V(X_i) = \frac{\lambda}{n}$$

$$\Longrightarrow Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}\left(n \cdot \frac{\lambda}{n}\right) =$$

$$= \mathcal{P}(\lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{ΚΟΘ}} Z = \frac{Y - n \cdot \frac{\lambda}{n}}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}} \cdot \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{Y-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0,1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P(Y \le y) = P\left(Z \le \frac{y-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) =$$

$$\boxed{= \Phi\left(\frac{y-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)}$$

Άσκηση: Αν $Y \sim b(n,p)$. Δείξατε ότι:

$$P(Y \leq y) \simeq \Phi\left(\frac{y-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Λύση: Θεωρούμε $X_i \sim b(1,p)$, προφανώς

$$E(X_i) = p \quad \text{και} \quad V(X_i) = pq \Rightarrow$$

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim b(n,p)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{\text{ΚΟΘ}} Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{pq}\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Y \leq y) = P(S_n \leq y) =$$

$$= P\left(Z_n \leq \frac{y-np}{\sqrt{npq}}\right) = \boxed{\Phi\left(\frac{y-np}{\sqrt{npq}}\right)}$$

Η προσέγγιση με το ΚΟΘ ΔΕΝ είναι καλή όταν n μικρό (≤ 500), ή όταν $p \simeq 0$ ή $p \simeq 1$.

ΚΑΝΟΥΜΕ ΣΥΝΕΧΟΠΟΙΗΣΗ

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Εάν } K=\sum_{i=1}^{n} X_i \, , \; X_i \underset{\xi}{\sim} b(1,p) \\ \Rightarrow P(k_1 \leq K \leq k_2) = \\ = \Phi\left(\frac{k_2+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)\end{gathered}}$$

ΤΥΠΟΣ De Moivre-Laplace

Άσκηση: Έστω K ο αριθμός της εμφάνισης "κεφάλη" σε 100 ρίψεις ενός νομίσματος. Βρείτε $P(50 \le K \le 51)$

Λύση: $P(50 \le K \le 51) = P(K=50) + P(K=51) =$

$$= \binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} + \binom{100}{51}\left(\frac{1}{2}\right)^{51}\left(\frac{1}{2}\right)^{49} =$$

$$\boxed{= 0.1576}$$

$$P(50 \le K \le 51) \overset{\text{ΚΟΘ}}{=} \Phi\left(\frac{51-50}{5}\right) - \Phi\left(\frac{50-50}{5}\right) = \boxed{0.079}$$

$$\mu = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50 \quad , \sigma = \sqrt{npq} = 5$$

$$P(50 \le K \le 51) \overset{\text{Laplace}}{=\!=} \Phi\left(\frac{51+0.5-50}{5}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{51-0.5-50}{5}\right) = \boxed{0.1577}$$