

(8)

Θεωρία Παιγνίων [11-5-18]

Δυναμικά Παιγνια Πλήρης Πληροφόρησης

1 Παιγνιο λέγεται δυναμικό όταν οι παίκτες επιλέγουν μια ενέργεια (μέρος μιας στρατηγικής) ετεροχρονικά, ο ένας μετά τον άλλον. Ένα δυναμικό παιχνίδι λέγεται δυναμικό παιχνίδι πλήρους πληροφόρησης όταν οι αποδόσεις v, NM αποτελούν κοινή γνώση και κάθε παίκτης γνωρίζει την ιστορία του παιχνιδιού τη χρονική στιγμή κατά την οποία καλείται να παίξει.

* Στα στατικά παιχνίδια ο συνολικός τρόπος απεικόνισης του παιχνιδιού είναι η κανονική μορφή, δηλ ο πίνακας (διπίνακας) (bi-matrix).

Στα δυναμικά παιχνίδια ο συνολικός τρόπος απεικόνισης είναι το δέντρο παιχνιδιού.

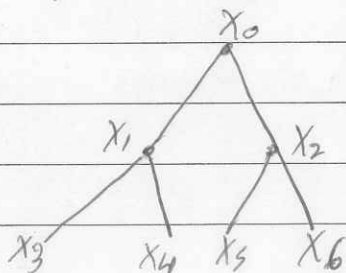
Ορισμός: Δέντρο παιχνιδιού (game tree) λέγεται 2 σιλόδο κόμβων X μαζί με μια σχέση διάταξης $X > X'$ με οποία διαβαζουμε "ο κόμβος X προηγείται του κόμβου X' ".

Η $>$ είναι ασυμμετρική ($X > X' \Rightarrow \neg X' > X$) και μεταβατική ($X > X' \wedge X' > X'' \Rightarrow X > X''$).

Το σύνολο των τελικών κόμβων ~~αποφασ~~ $Z \subseteq X$ συνδέεται με τις αποδόσεις v, NM του παιχνιδιού.

Το σύνολο $X \setminus Z$ είναι το σύνολο των κόμβων αποφασίας στους οποίους οι παίκτες επιλέγουν μια ενέργεια (ή δράση).

Ο αρχικός κόμβος αποφασίας είναι η ρίζα του δέντρου.



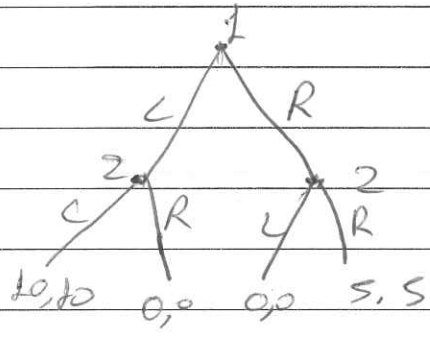
$X = \{x_0, x_1, \dots, x_6\}$ (δέντρο παιχνίδι)

$Z = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} \subseteq X$ (τελικοί κόμβος)

x_0 : ρίζα

Σε δυναμικά παίγνια, σε αντίθεση με τα στατικά, διακρίνουμε μεταξύ της στρατηγικής και της ενέργειας (ή δράσης) ενός παίκτη. Συγκεκριμένα, στα δυναμικά παίγνια υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των αποφάσεων των παικτών που οδηγεί σε επιπλέον πλάνο παιχνιδιού των παικτών που τους κέρδους αμοιβαίους και ανεξάρτητα μεταξύ τους αν κάποιος παίκτης κληθεί να παίξει σε αυτούς τους κόμβους.

Π.χ.

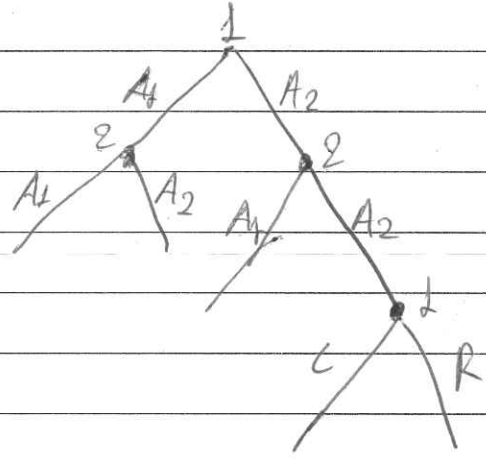


Ο χώρος στρατηγικής του παίκτη 1 είναι $S_1 = \{L, R\}$. Ομοίως $S_2 \neq S_1$ γιατί ο 2 μπορεί

να κληθεί να παίξει σε 2 κόμβους απόφασης και όχι ένα κόμβο όπως ο 1. Για τον 2 ο χώρος στρατηγικής του είναι είναι το σύνολο:

$$S_2 = \{(L, L), (L, R), (R, L), (R, R)\}$$

παράδ.



(8)

Χώρος στρατηγικής παίκτη 1:

$$S_1 = \{(A_1, L), (A_1, R), (A_2, L), (A_2, R)\}$$

Χώρος στρατηγικής παίκτη 2:

$$S_2 = \{(A_1, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_1), (A_2, A_2)\}$$

Κάθε στρατηγική (A_1, A_1) ή (A_1, A_2) ή (A_2, A_1) ή (A_2, A_2) είναι ένα πλήρες παύο παιχνίδι του παίκτη στο 2 και όλες μαζί αποτελούν το χώρο στρατηγικής του.

Αντίστροφα κάθε ζεύγος (A_1, L) , (A_1, R) , (A_2, L) , (A_2, R) αποτελεί ένα πλήρες παύο παιχνίδι στο 1 και το σύνολο των τεσσάρων αυτών στρατηγικών αποτελεί το χώρο στρατηγικής S_1 του 1.

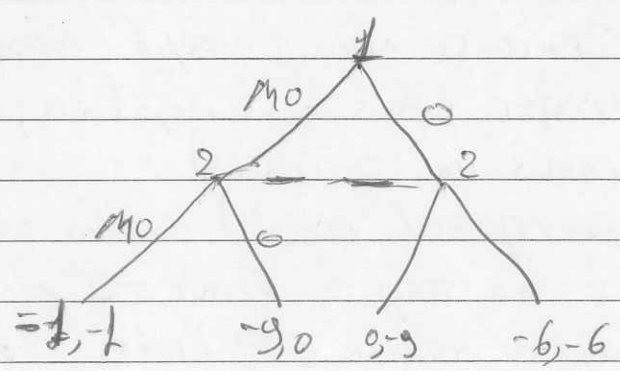
(επιπλέον επιλογή)

* Ένα στατικό παιχνίδι μπορεί να δοθεί σε έκτετακτη μορφή, εδώ με δέντρο. Όσοι, θα πρέπει πάντα στο δέντρο να κάνει κάποιος μια επιλογή δεν μπορεί να επιλέξει τον άλλο.

Παράδειγμα (Σ2P)

		2	
		M0	0
1	M0	-1, -1	-9, 0
	0	0, -9	-6, -6

κανονική μορφή



Εκτεταμένη μορφή (δέντρο παιχνιδιού)

* Η διακεκομμένη γραμμή, η οποία ενώνει τους κόμβους απόφασης του 2, δηλώνει ότι ο παίκτης δεν μπορεί να βρούμε επιπλέον στο δέντρο, εδώ δεν μπορεί να επιλέξει τον 1.

(9)

Οι δύο κόμβοι του παίκτη 2, τους οποίους έχουμε ενώσει με διακ. γραμμή, αποτελούν το σύνολο πληροφορίας του 2

Ορισμός: Ένα σύνολο πληροφορίας ενός παίκτη λέγεται ένα σύνολο κόμβων, το οποίο ικανοποιεί τις ακόλουθες 2 ιδιότητες: (i) σε κάθε κόμβο υπάρχει ο ίδιος παίκτης (ii) οι διαδοχικές ενέργειες από τις οποίες διαδραματίζεται ο παίκτης είναι ακριβώς οι ίδιες.
Ένα δένδρο παίκτη πλήρους πληροφορίας όλα τα σύνολα πληροφορίας είναι μονομερή.

* Όταν δείφαμε την εκτεταμένη μορφή του Δ.Φ. γράφαμε ότι ο 1 επιλέγει πρώτος. Θα μπορούσαμε να βάλουμε τον 2 να επιλέγει 2ος, με δεδομένο ότι οι 1 και 2 επιλέγουν ταυτόχρονα, οπότε η σειρά δεν έχει σημασία.

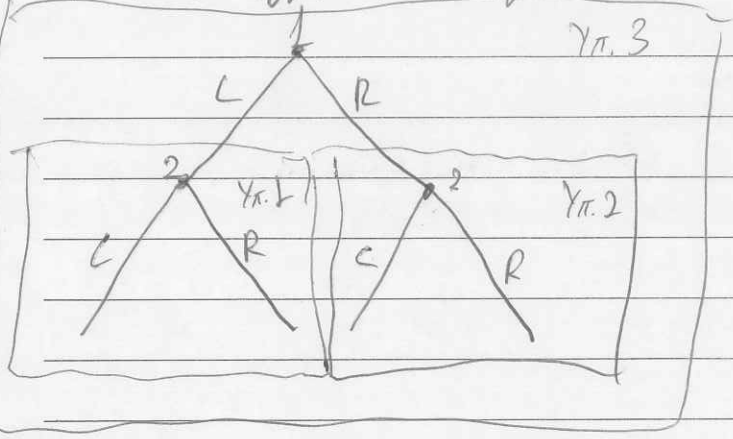
Ορισμός: Υποπαίγνιο ενός παιχνιδιού λέγεται ένας περιορισμός πάνω στο αρχικό παιχνίδι, ο οποίος ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- (α) Ξεκινάει από 1 κόμβο ατόφους
 - (β) Περιέχει όλους τους κόμβους, οι οποίοι ακολουθούν (ατόφους και τελικούς)
 - (γ) Δεν χάνει ("κόβει") σύνολα πληροφορίας
- Όταν ένα παιχνίδι είναι πλήρους πληροφορίας, τότε από κάθε κόμβο ατόφους ξεκινάει ένα υποπαίγνιο.

* Το ίδιο το παιχνίδι ικανοποιεί τα (α, β, γ) και επομένως αποτελεί από μόνο του ένα υποπαίγνιο, το οποίο λέγεται μη γνήσιο.

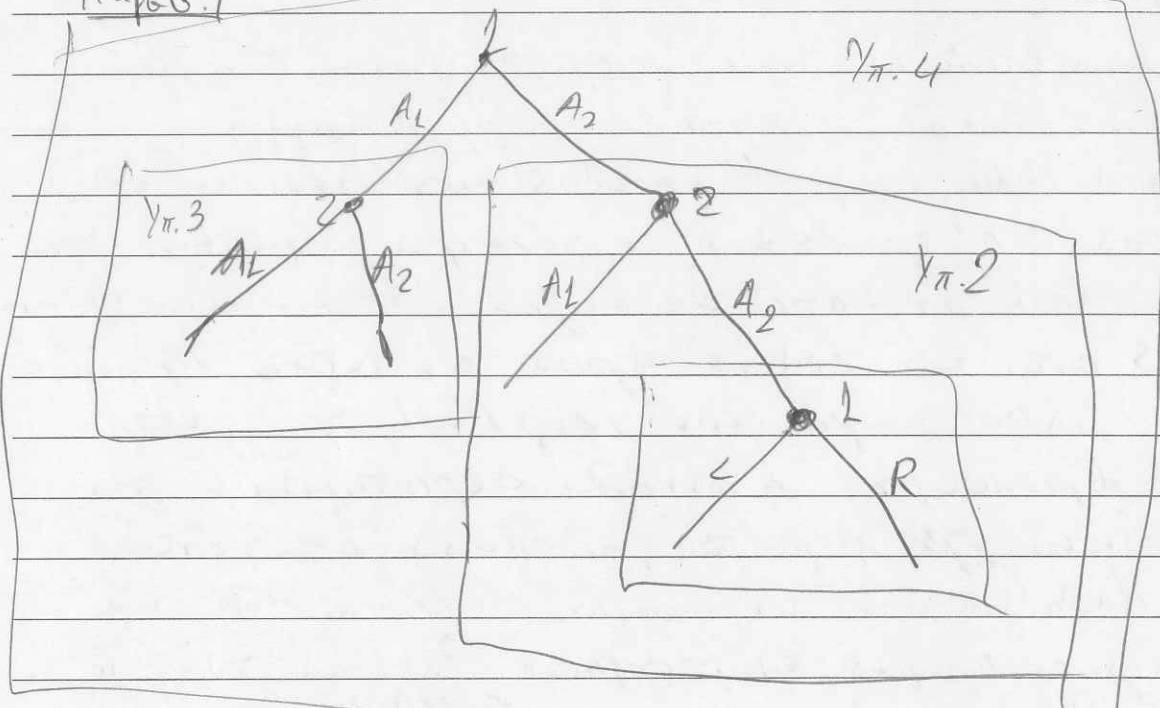
8

Παράδειγμα (υποπαίγνια)

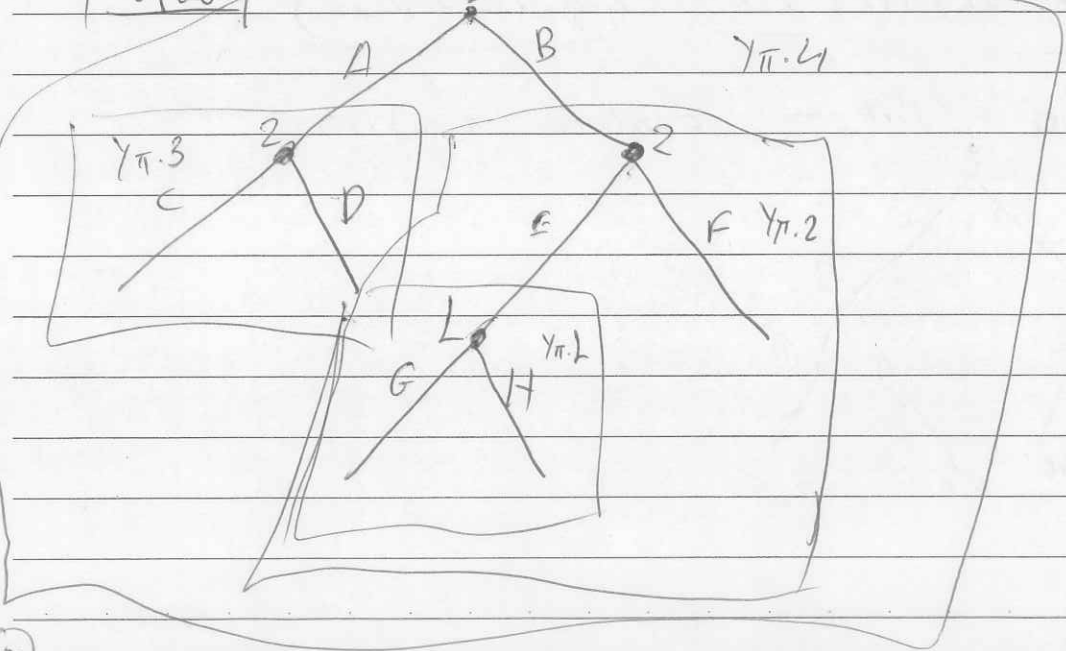


3 υποπαίγνια: Δύο γνήσια (Υπ.1 και Υπ.2) και αδίκτυο (το αμύγιο (πρ γνήσιο, Υπ.3))

Παράδ. 1

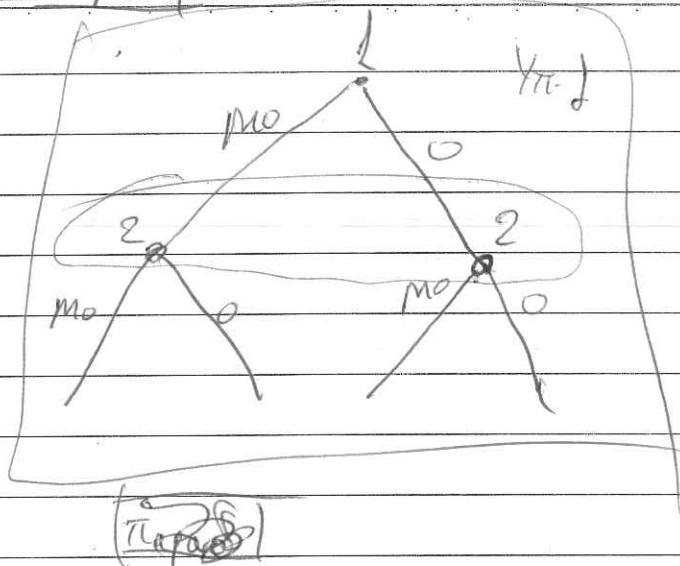


Παράδ. 2



9

Παροδ.1



2 γινώσκων υποπαίγνια

(Παροδ.1)

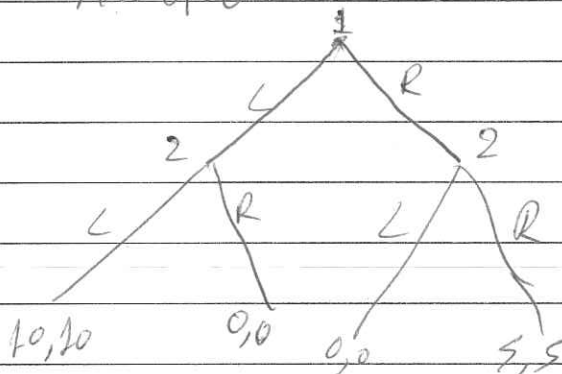
Η μεθοδολογία επίλυσης των δυναμ. παιχνιδιών τ.δ. τύπου παραρτήσεων είναι η προς τα πίσω επαγωγή.

(backward induction) Η μέθοδος αυτή δίνει το ελάχιστο.

Ξεκινώντας απ' το τέλος του δέντρου, βρίσκουμε την ισορροπία Nash σε κάθε υποπαίγνιο. Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζοντας από το τέλος προς την αρχή, προσδιορίζοντας κάθε φορά την ισορ. Nash των υποπαυνιδιών βρίσκουμε 1 σειρά στρατηγικών για κάθε παίκτη ~~και~~ χυρίσματα, οι οποίες αποτελούν ισορροπία Nash για κάθε υποπαίγνιο. Η τελική λύση του δυναμ. παιχνιδιού τ.δ. τύπου παραρτήσεων δίνει τα τελικά ισορροπία Nash και υποπαίγνιο (SPNE - Subgame Perfect Nash Equilibrium).

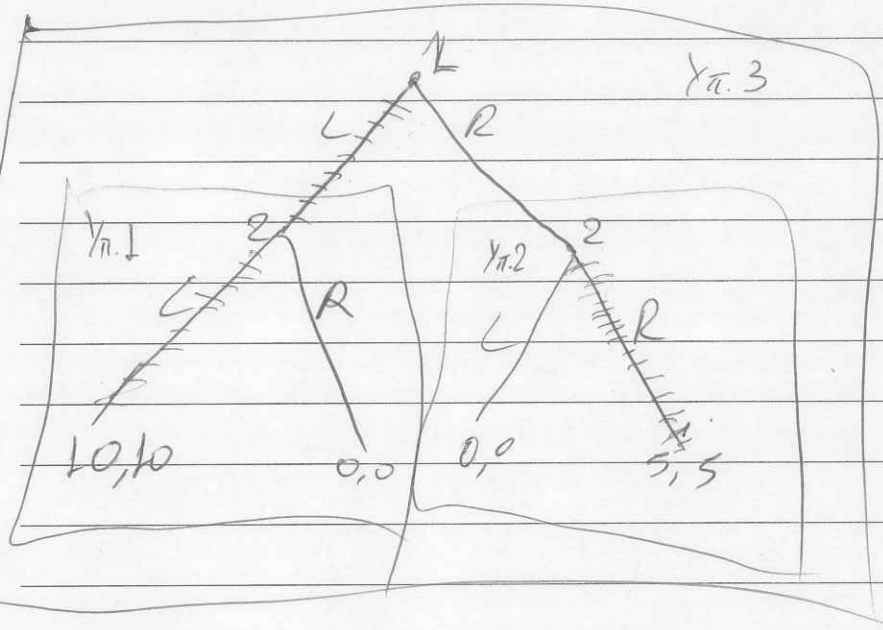
Παφ.1

Να βρεθεί - SPNE του συντάκτου παιχνιδιού



8

Πίστη: Υπάρχουν 3 υποπαιχνίδια για κάθε ένα από τα οποία βρίσκουμε την Ν.Ε.



γπ.1: Ο 2 παίζει L γιατί $10 > 0$.

γπ.2: Ο 2 παίζει R γιατί $5 > 0$.

γπ.3: Ο 1 γνωρίζει ότι ο 2 είναι ορθολογικός. Αρα γνωρίζει ότι αν παίζει L, τότε ο 2 στη συνέχεια θα παίζει L. Αν παίζει R, τότε γνωρίζει ότι ο 2 θα επιλέξει και ουσιαστικά R.

Εννοείται, αν ο 1 επιλέξει θα πάρει 10. Εάν αλλιώς παίζει R θα πάρει 5. Εν τέλει στο γπ.3 ο ορθολογικός

1 παίζει L. Επομένως, η SPNE των παιχτίων είναι, η $\{L, (L, R)\}$

Θεώρημα (Kuhn): Κάθε δυναμικό παιχνίδι πεδίου πληροφορίας με η παικτές, σε εκτεταμένη μορφή το οποίο είναι τετελεσμένο (το δένδρο σταματάει) έχει τουλάχιστον μία SPNE.

9

