

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Κατεύθυνση: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΑΝΟΙΞΗ 2018

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ

ΟΜΑΔΑ 2η

Άσκηση 1η: Έστω $N(t)$ μία διαδικασία *Poisson*, με λόγο λ . Ορίζουμε: $p_n(t) = P[N(t) = n]$. Χρησιμοποιώντας την ΔΕ $p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$ και κατάλληλες αρχικές συνθήκες, δείξτε ότι: $p_0(t) = e^{-\lambda t}$. Χρησιμοποιώντας την ΔΕ: $p'_n(t) + \lambda p_n(t) = \lambda p_{n-1}(t)$ και κατάλληλες αρχικές συνθήκες, δείξτε ότι: $p_n(t) = e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda p_{n-1}(t)$.

Άσκηση 2η: Έστω ότι η $X(t)$ είναι μία διαδικασία *Poisson* με λόγο λ και ότι η $Y(t)$ είναι μία διαδικασία *Poisson* με λόγο μ . Δείξτε ότι:

$$P[X(t) = k | X(t) + Y(t) = n] = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}$$

Άσκηση 3η: Έστω ότι η $X(t)$ είναι μία διαδικασία *Poisson* με λόγο λ και ότι η $Y(t)$ είναι μία διαδικασία *Poisson* με λόγο μ . Δείξτε, χρησιμοποιώντας πιθανογεννήτριες, ότι η μέση τιμή της $X(t) - Y(t)$ είναι $t(\lambda - \mu)$ και η διασπορά: $(\lambda + \mu)t$.

Άσκηση 4η: Έστω $N(t)$ μία διαδικασία *Poisson*, με λόγο λ . Δείξτε ότι:

$$R_N(t_1, t_2) = \lambda \min\{t_1, t_2\} + \lambda^2 t_1 t_2$$

όπου $R_N(t_1, t_2)$ η αυτοσυσχέτιση (*autocorellation*), της διαδικασίας.

Άσκηση 5η: Οι ασθενείς που φθάνουν σε ένα νοσοκομείο ακολουθούν την ανέλιξη *Poisson* με λόγο $\lambda = 1/10$ ανά λεπτό. Ο ιατρός δεν βλέπει έναν ασθενή μέχρι να περιμένουν τουλάχιστον 3 ασθενείς. (α) Βρείτε τον μέσο χρόνο αναμονής, μέχρι ο ιατρός να δεχτεί τον πρώτο ασθενή. (β) Ποιά είναι η πιθανότητα να μην δει ασθενή ο ιατρός την πρώτη ώρα:

Απάντηση: (α) 30, (β) 0.062