Θέμα 1ο. Ένα σημείο (x,y) με $x\in S_1=\mathbb{R}$ και $y\in S_2=\mathbb{R}$, αποτελεί ισορροπία Nash ενός στατικού παιγνίου πλήρους πληροφόρησης, με συνεχείς χώρους στρατηγικής, ανν (αν και μόνο αν) ικανοποιεί τις συνθήκες $\frac{\partial u_1}{\partial x}=0,\frac{\partial u_2}{\partial y}=0$ και $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}<0,\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}<0$, δηλαδή οι παίχτες 1 και 2 μεγιστοποιούν τη χρησιμότητά τους. Λύνουμε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x}&=-y-2x-2=0\\ \frac{\partial u_2}{\partial y}&=-x-6y+7=0\end{aligned}\right\}.$$

Η (μοναδική) λύση του παραπάνω γραμμικού συστήματος εξισώσεων είναι το σημείο $\left(-\frac{19}{11},\frac{16}{11}\right)$.

Όσον αφορά τις συνθήκες β' τάξης για κάθε παίχτη (ικανές συνθήκες για μέγιστο) βρίσκουμε $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=-2<0,\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-6<0$. Άρα το σημείο $\left(-\frac{19}{11},\frac{16}{11}\right)$ αποτελεί πράγματι τη (μοναδική) ισορροπία Nash του συγκεκριμένου παιγνίου. Όσον αφορά τώρα τις συναρτήσεις χρησιμότητας $u_1(x,y)=x^2-2xy, u_2(x,y)=xy-y^2$ λύνουμε, όπως πριν, το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (σύστημα συνθηκών πρώτης τάξης)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x}&=2x-2y=0\\ \frac{\partial u_2}{\partial y}&=x-2y=0\end{aligned}\right\}.$$

Η (μοναδική) λύση του παραπάνω γραμμικού συστήματος εξισώσεων είναι το σημείο $(x,y)=(0,0)$.

Όσον αφορά τις συνθήκες β' τάξης για κάθε παίχτη (ικανές συνθήκες για μέγιστο) βρίσκουμε

$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=2>0$: απορρίπτεται με δεδομένο ότι αναζητούμε μέγιστο (όχι ελάχιστο).

Άρα δεν υπάρχει ισορροπία Nash σε αυτό το παίγνιο. Το αποτέλεσμα αυτό δε δημιουργεί πρόβλημα όσον αφορά την ισχύ του θεωρήματος Nash με δεδομένο ότι το θεώρημα αυτό αφορά πεπερασμένους χώρους στρατηγικής (για όλους τους παίχτες) ενώ εδώ οι χώροι στρατηγικής είναι συνεχείς.

Σημείωση: Η στατική φύση των παραπάνω παιγνίων καταδεικνύεται από το γεγονός ότι λύνουμε τις συνθήκες πρώτης τάξης των δύο παιχτών ταυτόχρονα (ως ένα σύστημα εξισώσεων) με δεδομένο ότι αυτοί (δηλ. οι παίχτες) επιλέγουν ταυτόχρονα τη βέλτιστη στρατηγική τους.

Θέμα 2ο. Πρόκειται για το υπόδειγμα Bertrand με διαφοροποιημένα προϊόντα το οποίο αποτελεί κλασική εφαρμογή των στατικών παιγνίων πλήρους πληροφόρησης με συνεχείς χώρους στρατηγικής (θέμα 1ο). Το ρόλο των συναρτήσεων χρησιμότητας έχουν τώρα οι συναρτήσεις κέρδους με τύπους

$\pi_1(P_1,P_2)=(A-P_1+bP_2)P_1-cQ_1=(A-P_1+bP_2)P_1-c(A-P_1+bP_2)=(A-P_1+bP_2)(P_1-c)$ και

$\pi_2(P_1,P_2)=(A-P_2+bP_1)P_2-cQ_2=(A-P_2+bP_1)P_2-c(A-P_2+bP_1)=(A-P_2+bP_1)(P_2-c)$

για τις επιχειρήσεις (παίχτες) 1 και 2, αντίστοιχα. Όπως ακριβώς και στο προηγούμενο θέμα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (σύστημα συνθηκών α' τάξης για τη μεγιστοποίηση του κέρδους)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\pi_1}{\partial P_1}&=-(P_1-c)+(A-P_1+bP_2)=0\\ \frac{\partial\pi_2}{\partial P_2}&=-(P_2-c)+(A-P_2+bP_1)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}-2P_1+bP_2+A+c=0\\ bP_1-2P_2+A+c=0\end{aligned}\right\}.$$

Λύνουμε ως προς P_1 την πρώτη εξίσωση οπότε βρίσκουμε $P_1=\frac{A+c}{2}+\frac{b}{2}P_2$. Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα αυτό στη δεύτερη εξίσωση η οποία γίνεται

$$b\left(\frac{A+c}{2}+\frac{b}{2}P_2\right)-2P_2+A+c=0\,.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μοναδικό άγνωστο το P_2 το οποίο τελικά (μετά από πράξεις) προκύπτει ότι είναι ίσο με

$$P_2=\frac{A+c}{2-b}.$$

Άρα βρίσκουμε ότι

$$P_1=\frac{A+c}{2}+\frac{b}{2}\frac{A+c}{2-b}=\frac{A+c}{2-b}.$$

Όσον αφορά τις συνθήκες β' τάξης έχουμε ότι $\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial P_1^2} = -2 < 0$ και $\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial P_2^2} = -2 < 0$. Άρα το σημείο

$\left(\frac{A+c}{2-b}, \frac{A+c}{2-b}\right)$ αποτελεί τη (μοναδική) ισορροπία Nash του συγκεκριμένου παιγνίου.

Θέμα 3ο. Λυμένο στην η-τάξη. Είναι το αρχείο .pdf με ονομασία "Ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές (NEMS)."

Θέμα 4ο. Λυμένο στην η-τάξη. Είναι το αρχείο .pdf με ονομασία "Η συνάρτηση χρησιμότητας von Neumann-Morgenstern." Όσον αφορά το τελευταίο ερώτημα, είναι λυμένο στο αρχείο .pdf με τίτλο "Ορισμοί."

Θέμα 5ο. Ο παίχτης R βλέπει ότι αν ο C παίξει C1, τότε αυτός πρέπει να παίξει R1 γιατί 2>1 (+). Αν ο C παίξει C2, τότε αυτός πρέπει να παίξει R1 γιατί 10>8 (+). Αντίστοιχα ο παίχτης C βλέπει ότι αν ο R παίξει R1, τότε αυτός πρέπει να παίξει C1 γιατί 7>3 (-). Αν ο R παίξει R2, τότε αυτός πρέπει να παίξει C2 γιατί 16>9 (-).

		C	
		C1	C2
R	R1	+2,7-	+10,3
	R2	1,9	8,16-

Άρα το συγκεκριμένο παίγνιο έχει μια ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές η οποία είναι η στρατηγική (συνδυασμός στρατηγικών) (R1,C1). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της IESDS λέμε τα ακόλουθα: Αν ο R είναι ορθολογικός (κοινή γνώση ορθολογικότητας τάξης μηδέν), τότε αυτός δεν θα παίξει ποτέ τη στρατηγική R2 γιατί αυτή είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την R1 (1<2 και 8<10). Άρα διαγράφουμε τη συγκεκριμένη στρατηγική:

		C	
		C1	C2
R	R1	+2,7-	+10,3
	R2	1,9	8,16-

Ο C δεν έχει καμία αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική. Ωστόσο αν πιστεύει ότι ο R είναι ορθολογικός (ΚΓΟ πρώτης τάξης), τότε δεν θα παίξει ποτέ C2 με δεδομένο ότι η C2 αποτελεί βέλτιστη απόκριση για τον C μόνο αν ο R παίξει R2, την οποία όμως ο R δεν πρόκειται ποτέ να παίξει. Άρα μπορούμε να διαγράψουμε τη στρατηγική C2 και επομένως να καταλήξουμε στη μοναδική ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές (R1,C1).

		C	
		C1	C2
R	R1	+2,7-	+10,3
	R2	1,9	8,16-

Συνοψίζοντας επομένως, η IESDS σε συνδυασμό με ΚΓΟ πρώτης τάξης λύνουν το παίγνιο.

Θέμα 6ο. Ο παίχτης R βλέπει ότι αν ο C παίξει C1, τότε αυτός πρέπει να παίξει R1 γιατί 3>2 (+). Αν ο C παίξει C2, τότε αυτός πρέπει να παίξει R1 γιατί 9>8 (+). Αντίστοιχα ο παίχτης C βλέπει ότι αν ο R παίξει R1, τότε αυτός πρέπει να παίξει C1 γιατί 8>4 (-). Αν ο R παίξει R2, τότε αυτός πρέπει να παίξει C2 γιατί 16>10 (-).

		C	
		C1	C2
R	R1	+3,8-	+9,4
	R2	2,10	8,16-

Άρα το συγκεκριμένο παίγνιο έχει μια ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές η οποία είναι η στρατηγική (συνδυασμός στρατηγικών) (R1,C1). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της IESDS λέμε τα ακόλουθα: Αν ο R είναι ορθολογικός (κοινή γνώση ορθολογικότητας τάξης μηδέν), τότε αυτός δεν θα παίξει ποτέ τη στρατηγική R2 γιατί αυτή είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την R1 (2<3 και 8<9). Άρα διαγράφουμε τη συγκεκριμένη στρατηγική:

		C	
		C1	C2
R	R1	+3,8-	+9,4
	R2	2,10	8,16-

Ο C δεν έχει καμία αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική. Ωστόσο αν πιστεύει/γνωρίζει ότι ο R είναι ορθολογικός (ΚΓΟ πρώτης τάξης), τότε δεν θα παίξει ποτέ C2 με δεδομένο ότι η C2 αποτελεί βέλτιστη απόκριση για τον C μόνο αν ο R παίξει R2, την οποία όμως ο R δεν πρόκειται ποτέ να παίξει. Άρα μπορούμε να διαγράψουμε τη στρατηγική C2 και επομένως να καταλήξουμε στη μοναδική ισορροπία Nash σε καθαρές στρατηγικές (R1,C1).

		C	
		C1	C2
R	R1	+3,8-	9,4
	R2	2,10	8,16-

Συνοψίζοντας επομένως, η IESDS σε συνδυασμό με ΚΓΟ πρώτης τάξης λύνουν το παίγνιο.

Θέμα 7ο. Η απάντηση του ερ. (α) βρίσκεται στην η-τάξη, στο αρχείο .pdf με τίτλο "Ορισμοί." Η απάντηση του πρώτου μέρους του ερ. (β) βρίσκεται στην η-τάξη, στο αρχείο .pdf με τίτλο "Ορισμός μεικτής στρατηγικής παιγνίου σε κανονική μορφή." Όσον αφορά το δεύτερο μέρος του ερ. (β) λέμε τα ακόλουθα: Ισορροπία Nash σε μεικτές στρατηγικές λέγεται μια κατανομή πιθανότητας, για κάθε παίχτη, τότε ώστε αυτός (δηλ. ο παίχτης) να είναι αδιάφορος μεταξύ των καθαρών του στρατηγικών υπό την έννοια ότι αυτές του αποφέρουν την ίδια χρησιμότητα von Neumann-Morgenstern (ή προσδοκώμενη χρησιμότητα).