1. $I=\int x^3(\ln x)^2\,dx = \int \underbrace{\left(\frac{x^4}{4}\right)'}_{f(x)}\underbrace{(\ln x)^2}_{g(x)}\,dx = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2 - \int \frac{x^4}{4}\cdot 2\ln x\cdot \frac{1}{x}\,dx$ (1)

Ολοκληρώψ ατα

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$= \frac{x^4}{4}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\int x^3(\ln x)^1\,dx \qquad I_1 = \int x^3 \ln x\,dx$

$I_1 = \int\left(\frac{x^4}{4}\right)'\ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}(\ln x)'\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\int x^4\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\,dx$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}+c\right) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}c = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{16}x^4 + C_1 = \frac{3}{16}x^4 + C_1,$

$C_1 = -\frac{1}{4}c$. Άρα τελικά,

$I = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}x^4 + C_1\right) = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2 - \frac{3}{32}x^4 + C_2,\ C_2 = -\frac{1}{2}C_1,\ C_1\in\mathbb{R}$

ζ)

$$I=\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^2-x}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^4-x^3-x-1 & x^2-x \;\rightarrow \text{Διαιρέτη} \\ -\;\; x^4-x^3 \qquad\quad & \overline{x^2} \rightarrow \text{Πηλίκο} \\ \hline -x-1 & \end{array}$$

$x^4-x^3-x-1 \rightarrow$ Διαιρετέος

$-x-1 \rightarrow$ Υπόλοιπο

$$x^4-x^3-x-1=(x^2-x)x^2+(-x-1) \Rightarrow$$

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^2-x}=x^2+\frac{-x-1}{x^2-x}$$

$$I=\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^2-x}\,dx=\int\left(x^2+\frac{-x-1}{x^2-x}\right)dx=\int x^2\,dx+\int\frac{-x-1}{x^2-x}=\frac{x^3}{3}+c-\int\frac{x+1}{x^2-x}$$

$$x^2-x=x(x-1)$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-\cancel{4\alpha\gamma}=(-1)^2=1$$

$$\rho_1=\frac{-(-1)+\sqrt{1}}{2}=\frac{1+1}{2}=1,\quad \rho_2=\frac{-(-1)-\sqrt{1}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$

$$\frac{x+1}{x^2-x}=\frac{x+1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}\Rightarrow x+1=A(x-1)+Bx,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

- $x=0 \Rightarrow 1=-A \Rightarrow \boxed{A=-1}$
- $x=1 \Rightarrow \boxed{2=B}$

(2)

3

$$\frac{x+1}{x^2-x}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}. \text{ Άρα } \int\frac{x+1}{x^2-x}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{2}{x-1}dx=$$

$$=-\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{x-1}dx=-\ln|x|+c_1+2\left(\ln|x-1|+c_2\right)=$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|+c_1+2c_2$$

Άρα τελικά $I=\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^2-x}dx=\frac{x^3}{3}+c-\left(-\ln|x|+2\ln|x-1|+c_1+2c_2\right)$

$$=\frac{x^3}{3}+\ln|x|-2\ln|x-1|+c-c_1-2c_2$$

$$=\frac{x^3}{3}+\ln|x|-\ln(x-1)^2+C_1,\ C_1=c-c_1-2c_2,$$

$c, c_1, c_2\in\mathbb{R},\ C_1\in\mathbb{R}$

4

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{c} x e^{-x^2}\,dx + \int_{c}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx = \lim_{L\to-\infty}\int_{L}^{c} x e^{-x^2}\,dx + \lim_{K\to+\infty}\int_{c}^{K} x e^{-x^2}\,dx$$

Υπολογίζω το $\int_{L}^{c} x e^{-x^2}\,dx$

Θέτω $\boxed{\omega = -x^2} \Rightarrow d\omega = (-x^2)'\,dx \Rightarrow d\omega = -2x\,dx \Rightarrow \boxed{x\,dx = -\frac{1}{2}\,d\omega}$

$$\int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{\omega}\,d\omega = -\frac{1}{2}\left(e^{\omega} + c_1\right) = -\frac{1}{2}e^{\omega} + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$\int_{L}^{c} x e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{L}^{c} = -\frac{1}{2}e^{-c^2} + \frac{1}{2}e^{-L^2}$$

$$\lim_{L\to-\infty}\int_{L}^{c} x e^{-x^2}\,dx = \lim_{L\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-c^2} + \frac{1}{2}e^{-L^2}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-c^2} + \lim_{L\to-\infty} \frac{1}{2e^{L^2}} = -\frac{1}{2}e^{-c^2} + 0 = -\frac{1}{2}e^{-c^2}$$ 5

$$\int_c^K xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_c^K = -\frac{1}{2}e^{-K^2} + \frac{1}{2}e^{-c^2}$$

$$\lim_{K\to+\infty} \int_c^K xe^{-x^2}dx = \lim_{K\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-K^2} + \frac{1}{2}e^{-c^2}\right) = \frac{1}{2}e^{-c^2}$$

Άρα:

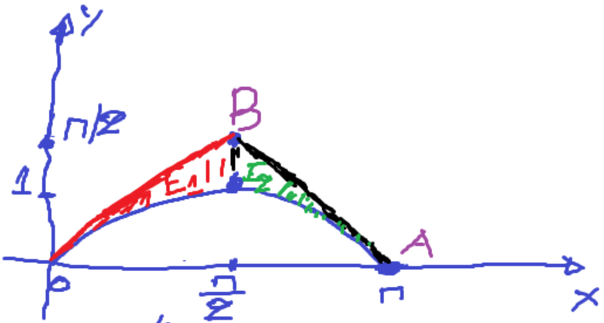
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{L\to-\infty}\int_L^c xe^{-x^2}dx + \lim_{K\to+\infty}\int_c^K xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-c^2} + \frac{1}{2}e^{-c^2} = 0.$$

Συμπέρασμα: Άρα το $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ συγκλίνει στο 0.

Άσκηση

6

Βρείτε το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται μεταξύ της $y=ημx$ και των εφαπτομένων της στα σημεία $(0,0)$ και $(π,0)$.



Λύση

$y=ημx \quad y(0)=ημ0=0 \quad y(π)=ημπ=0 \quad ημ\frac{π}{2}=1$

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

- $x_0=0 \quad f(0)=ημ0=0 \quad f'(x)=συνx \quad f'(0)=συν0=1$

$y-0=1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=x}$

- $x_0=π \quad f(π)=ημπ=0 \quad f'(x)=συνx \quad f'(π)=συνπ=-1$

$y-0=-1(x-π) \Rightarrow \boxed{y=π-x}$

Παρατήρηση: $\begin{cases} y=x \\ y=π-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=π-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2x=π \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{π}{2} \\ x=\frac{π}{2} \end{cases}$

$\overset{\triangle}{OBA}$ ισοσκελές $(OB=OA)$

$$E_1=\int_0^{π/2}(x-ημx)dx=\left[\frac{x^2}{2}+συνx\right]_0^{π/2}=\frac{(\frac{π}{2})^2}{2}+συν\frac{π}{2}-\left(\frac{0^2}{2}+συν0\right)=\frac{π^2}{8}-1=\frac{π^2-8}{8}$$

7

$$E_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x - \eta\mu x)\,dx = \left[\pi x - \frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x\right]_{\pi/2}^{\pi} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} + \sigma\upsilon\nu\pi - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\pi^2}{2}} - 1 - \cancel{\frac{\pi^2}{2}} + \frac{\pi^2}{8} - 0 = \frac{\pi^2}{8} - 1 = \frac{\pi^2 - 8}{8} \qquad \frac{\pi^2 - 8}{8}$$

Άρα τελικά το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = E_1 + E_2 = 2\,\frac{\pi^2 - 8}{8} = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε προσεγγιστικά με τον τύπο του διαφορικού το $1.1^{\frac{1}{1.1}}$

Λύση

$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

$\alpha = 1, \quad h = 0.1$

$$f(\alpha+h) \simeq f(\alpha) + f'(\alpha)h \quad (1)$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = f'(1) = 1^{\frac{1}{1}}\left(-\frac{1}{1^2}\ln 1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\right) = 1(0+1) = 1$$

$$(1) \Rightarrow f(\alpha+h) = f(1.1) = 1.1^{\frac{1}{1.1}} \simeq 1^{\frac{1}{1}} + 1 \cdot 0.1 = 1 + 0.1 =$$

$$= 1.1$$

9

Άσκηση

Δίνεται $y(x)=xe^{y(x)}$. Υπολογίστε το $y''(0)$. (Υπόθεση: Ορίζεται η $y(x)$ στο $x=0$)

Λύση

Παρατήρηση: $y(0)=0e^{y(0)}=0 \Rightarrow \boxed{y(0)=0}$

$y(x)=xe^{y(x)} \Rightarrow y'(x)=x'e^{y(x)}+x\left(e^{y(x)}\right)'=e^{y(x)}+xe^{y(x)}y'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y'(x)=e^{y(x)}+xe^{y(x)}y'(x) \quad (1)}$

$(1)\Rightarrow y'(0)=e^{y(0)}+0e^{y(0)}y'(0)=e^{0}+0e^{0}\cdot y'(0)\Rightarrow \boxed{y'(0)=1}$

$(1)\Rightarrow y''(x)=e^{y(x)}y'(x)+e^{y(x)}y'(x)+xe^{y(x)}y'(x)y'(x)+xe^{y(x)}y''(x)$

$\Rightarrow y''(0)=e^{y(0)}y'(0)+e^{y(0)}y'(0)+0e^{y(0)}(y'(0))^2+0e^{y(0)}y''(0)=e^0\cdot 1+e^0\cdot 1=2 \Rightarrow \boxed{y''(0)=2}$

·Άσκηση

Η ζήτηση q συνδέεται με την τιμή p με τη συνάρτηση $p=-q^2-3q+100$. Να υπολογίσετε την ελαστικότητα της ζήτησης όταν $p=90$.

Λύση

$$E_q(p) = \frac{\frac{dq}{dp}p}{q} = \frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}$$

$$p=-q^2-3q+100 \Rightarrow 1 = -2q\frac{dq}{dp} - 3\frac{dq}{dp} = -(2q+3)\frac{dq}{dp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{1}{2q+3}$$ Άρα $$\boxed{E_q(p) = -\frac{1}{2q+3}\cdot\frac{p}{q} \quad (1)}$$

$p=-q^2-3q+100 \Rightarrow 90=-q^2-3q+100 \Rightarrow -q^2-3q+10=0 \Rightarrow q^2+3q-10=0$

$\Delta = 3^2-4(-10)=49$, $q_1=\frac{-3+\sqrt{49}}{2}=\frac{-3+7}{2}=2$, $q_2=\frac{-3-\sqrt{49}}{2}=\frac{-3-7}{2}=-5$ (απορ. αφού $q>0$)

Τελικά:

$$(1) \Rightarrow E_q(p)\Big|_{p=90} = -\frac{1}{2\cdot 2+3}\cdot\frac{90}{2} = -\frac{1}{7}\cdot 45$$

$$\mathcal{E}_9(p) = -\frac{1}{2\cdot 2+3}\,\frac{90}{2} = -\frac{1}{7}\cdot 45 = -6.43$$

Άσκηση

Να βρείτε τη σειρά Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης $f(x)=\ln(1+x)$, να βρείτε το διάστημα σύγκλισής της, και να βρείτε τη σειρά Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης $g(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Λύση

Η σειρά Taylor είναι: $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Εδώ $a=0$. Άρα η σειρά Taylor είναι $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\boxed{f^{(k)}(0)}}{k!}x^k$

$f(x)=\ln(1+x)$, $f(0)=\ln(1+0)=0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'=\frac{1}{1+x}$, $f'(0)=\frac{1}{1+0}=1$, $f''(x)=\left((x+1)^{-1}\right)'=$

$=-(1+x)^{-2}(1+x)'=-(1+x)^{-2}=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f''(0)=-\frac{1}{(1+0)^2}=-1$, $f'''(x)=\left(-(1+x)^{-2}\right)'=$

$=2(1+x)^{-3}\cdot(1+x)'=\frac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(0)=\frac{2}{(1+0)^3}=2$, $f^{(4)}(0)=\left(2\cdot(1+x)^{-3}\right)'=-2\cdot 3\cdot(1+x)^{-4}\cdot(1+x)' \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = -\dfrac{3\cdot 2}{(1+x)^4}$ Άρα $f^{(4)}(0) = -3\cdot 2$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = -1$

$f'''(0) = 2 = 2\cdot 1 = 2!$

$f''''(0) = -3\cdot 2 = -3\cdot 2\cdot 1 = -3!$

$f^{(5)}(0) = 4\cdot 3\cdot 2 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!$

$f^{(6)}(0) = -5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = -5!$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\ ,\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$n=1 \quad f^{(1)}(0) = (-1)^{1-1}\cdot(1-1)! = 1\cdot 0! = 1\cdot 1 = 1$

$n=2 \quad f^{(2)}(0) = (-1)^{2-1}(2-1)! = -1\cdot 1! = -1\cdot 1 = -1$

$n=3 \quad f^{(3)}(0) = (-1)^{3-1}(3-1)! = (-1)^2\cdot 2! = 2$

$\vdots$

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \ln(1+x)$ ✓

$D(f) = (-1, +\infty)$

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)}\cdot n} = \frac{1}{n}$$

Άρα η σειρά Taylor με κέντρο το 0 της $f(x) = \ln(1+x)$ είναι

$$* \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$ ✓ *

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Για να βρώ για ποιο x συγκλίνει εφαρμόζω το κριτήριο του λόγου. Έστω $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}\right| = \left|\frac{(-1)^n x^{n+1} \cdot n}{(-1)^{n-1} x^n (n+1)}\right| = \left|\frac{\cancel{(-1)^{n-1}} (-1) \cdot n \cdot x}{\cancel{(-1)^{n-1}} \cdot (n+1)}\right| =$$

$$= \left|-\frac{n}{n+1}\right| |x| = \frac{n}{n+1} |x|$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1} |x|\right) = |x| \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \underline{|x|}$$

15

Από το κριτήριο του λόγου η σειρά συγκλίνει εάν $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ Εδώ έχουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|$

Άρα η σειρά συγκλίνει όταν $|x|<1 \iff x\in(-1,1)$.

Άρα το διάστημα σύγκλισης της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \text{είναι το } (-1,1]$$

$$f(x)=\ln(1+x) \quad D(f)=(-1,+\infty)$$

$f(x)=\ln(1+x)$ $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$ 16

$$g(x)=\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

Η σειρά Taylor με κέντρο το 0 της $\ln(1-x)$ είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-1}}{n} x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

Άρα η σειρά Taylor με κέντρο το 0 της

$g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ είναι

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \cdots -$$

$$\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \cdots\right) =$$

$$\frac{2}{1}x^1 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \frac{2}{9}x^9 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)} x^{2n+1}$$