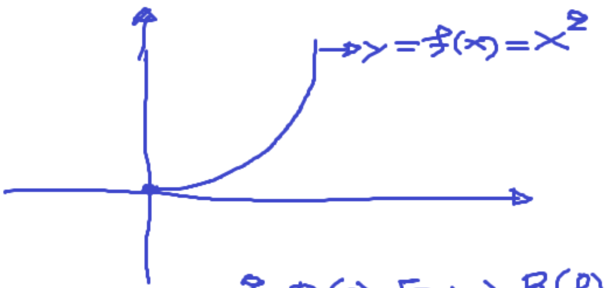
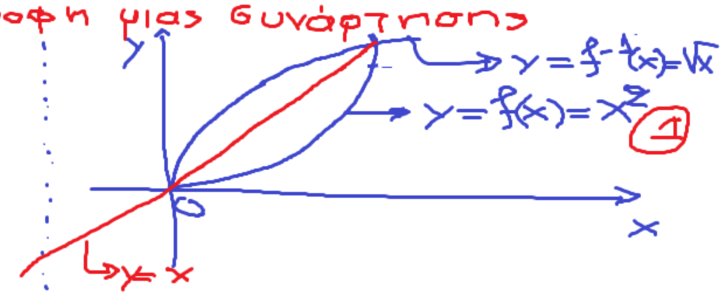
Αντίστροφη μιας συνάρτησης





$y=f(x)=x^2$ $D(f)=[0,+\infty)$ $R(f)=[0,+\infty)$

Η $f(x)$ είναι "1-1" και επομένως ορίζεται η αντίστροφη

$x^2=y \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$ Αλλά $x\in D(f)=[0,+\infty)$

Άρα $x=\sqrt{y}=f^{-1}(y)$ $\quad x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y=f(x)=x^2$

Αντί για $f^{-1}(y)=\sqrt{y}=x$ συμβολίζουμε συνή-θως την ανεξ. μετ. με x και γράφουμε $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{d\sqrt{y}}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Γενικά για την παράγωγο της αντί-στροφής ισχύει το εξής:

$$\boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}}$$

Εφαρμογή

$$\frac{dx}{dy}=\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{dy/dx}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Αντίστροφες συναρτήσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και παράγωγοί τους

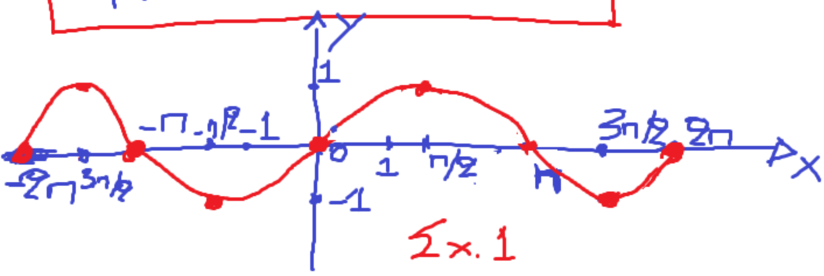
1) ημx

$y=f(x)=ημx$ $D(f)=\mathbb{R}$ $R(f)=[-1,1]$

$ημ(-2π)=ημ(2π)=ημ(0)=0$ $ημ\left(\frac{π}{2}\right)=1$

$ημ(-π)=ημ(π)=0$ $ημ\left(\frac{3π}{2}\right)=-1=ημ\left(-\frac{π}{2}\right)$

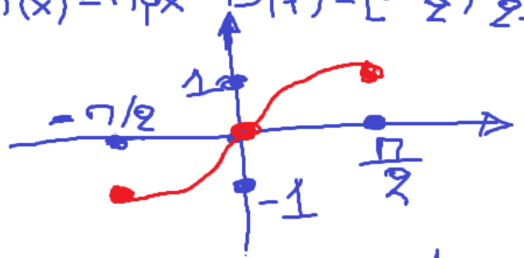
$\boxed{ημ(x+2π)=ημx \ \forall x\in D(f)}$



Σx.1

Η συνάρτηση $y=f(x)=\sin x$ δεν είναι 1-1 αφού για παράδειγμα $f\left(-\frac{π}{2}\right)=f\left(\frac{3π}{2}\right)=$ $=-1$. Για να την κάνουμε "1-1" την περιορίζουμε σε κατάλληλο υποσύνολο του $D(f)$, π.χ. στο $\left[-\frac{π}{2},\frac{π}{2}\right]$ και έτσι προκύπτει η συνάρτηση

$y = f(x) = ημx$ $\quad D(f) = \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right]$ $\quad R(f) = [-1, 1]$



$ημ(0) = 0$

$ημ\left(\frac{π}{2}\right) = 1$

$ημ\left(-\frac{π}{2}\right) = -1$

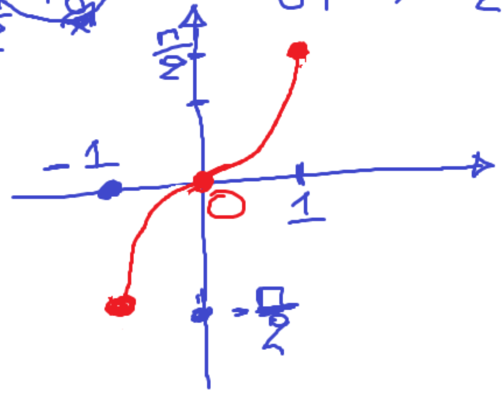
Για αυτή τη συνάρτηση ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $y = f^{-1}(x) =$ Τοξημx. Έχουμε

$D(f^{-1}) = R(f) = [-1, 1]$, $R(f^{-1}) = D(f) = \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right]$

Τοξημ(0) = 0

Τοξημ(1) $= \frac{π}{2}$

Τοξημ(−1) $= -\frac{π}{2}$



Παρατήρηση

$y = f(x) = ημx$

Εξίσωση της εφαπτομένης στο $(x,y) = (0,0)$:

$$y - 0 = f'(0)(x - 0) \Rightarrow$$

$$y = συν0 \cdot x \Rightarrow y = x$$

Τοξημ0 = 0

Τοξημ1 = $\frac{π}{2}$

Τοξημ(−1) = $-\frac{π}{2}$

Υπολογισμός παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης (4)

1ος τρόπος

$$y = f(x) = ημx,\ x \in D(f) = \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right],$$

$$y \in R(f) = [-1, 1]$$

$$x \underset{\text{Τοξημ}}{\overset{\text{ημ}}{\rightleftarrows}} y$$

$$y = ημx \Leftrightarrow \text{Τοξημ}\,y = x = f^{-1}(y)$$

Από πρόταση

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{συνx}$$

$$ημ^2x + συν^2x = 1 \Rightarrow συνx = \pm\sqrt{1 - ημ^2x}$$

Για $x \in \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right]$ $συνx \geq 0$ Άρα $συνx = \sqrt{1 - ημ^2x}$

Δηλαδή $\frac{dx}{dy} = \frac{d f^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{συνx} = \frac{1}{\sqrt{1-ημ^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow$ 5

$$\Rightarrow \frac{d(τοξημy)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in (-1,1)$$

Αν ονομάσουμε την ανεξ. μεταβλητή x παίρνουμε τελικά

$$\boxed{\frac{d(τοξημx)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)}$$

2ος τρόπος

$$y = f^{-1}(x) = τοξημx \Leftrightarrow ημy = x \qquad x \underset{ημ}{\overset{τοξημ}{\rightleftarrows}} y \qquad x \in [-1,1],\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$ημy = x \Rightarrow συνy \cdot y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{συνy} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-ημ^2 y}} \overset{y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{\underset{συνy > 0}{=}} \frac{1}{\sqrt{1-ημ^2 y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d(τοξημx)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)}$$

Άσκηση

Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία της $y = \text{τοξημ}x$ στο $(0,0)$.

Λύση

$$y-0=\frac{d}{dx}(\text{τοξημ}x)\Big|_{x=0}(x-0)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{τοξημ}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow$$

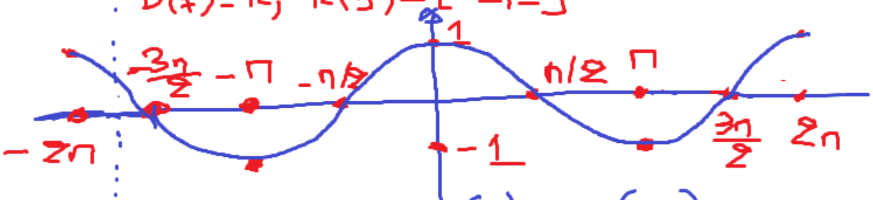
$$\frac{d}{dx}(\text{τοξημ}x)\Big|_{x=0}=1$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y=1\cdot x \Leftrightarrow y=x$$

$f(x)=\text{συν}x$

$D(f)=\mathbb{R}, \quad R(f)=[-1,1]$



$\text{συν}(0)=1 \quad \text{συν}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{συν}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

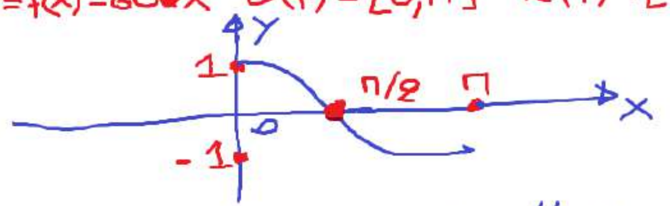
$\text{συν}(\pi)=\text{συν}(-\pi)=-1$

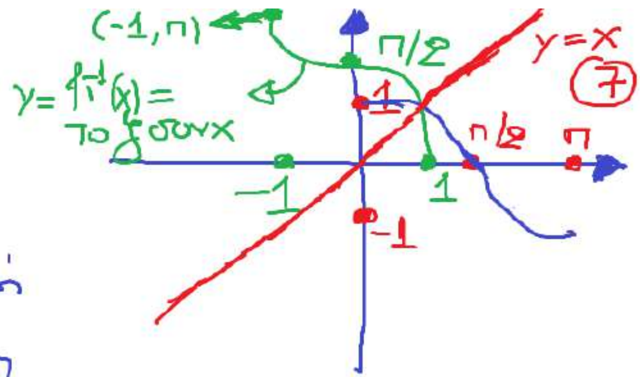
Περιοδική: $\text{συν}(x+2\pi)=\text{συν}x, \forall x\in D(f)$

Αφού είναι περιοδική δεν είναι "1-1" και επομένως δεν ορίζεται η αντίστροφη.

Την περιορίζω στο διάστημα $[0,\pi]$. Στο διάστημα αυτό είναι "1-1" και επομένως ορίζεται η αντίστροφη

$y=f(x)=\text{συν}x \quad D(f)=[0,\pi] \quad R(f)=[-1,1]$





Αυτή η συνάρτηση είναι "1-1" και σε αυτή ορίζεται η αντίστροφη

$y=f^{-1}(x)=\text{τοξσυν}x \quad D(f^{-1})=R(f)=[-1,1]$

$R(f^{-1})=D(f)=[0,\pi]$

$\text{τοξσυν}1=0, \ \text{τοξσυν}0=\frac{\pi}{2}, \ \text{τοξσυν}(-1)=\pi$

Εύρεση παραγώγου αντίστροφης

$1^{ος}$ τρόπος

$y = f(x) = συνx, \; D(f) = [0, π], \; R(f) = [-1, 1]$

$Τοξσυνy = x = f^{-1}(y)$

Από πρόταση

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{ημx} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1-συν^2x}} \Rightarrow$$

$x \in [0, π] \Rightarrow ημx \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{df^{-1}(y)}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-συν^2x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \; y \in (-1, 1)$$

8

και αν ονομάσουμε x την ανεξάρτητη μεταβλητή θα έχουμε

$$\frac{d(Τοξσυνx)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$x \in (-1, 1)$

2ος τρόπος

$y = f^{-1}(x) = \text{τοξσυν}\,x,\ x \in [-1,1],\ y \in [0,\pi]$

$y = \text{τοξσυν}\,x \Leftrightarrow \text{συν}\,y = x$

$\text{συν}\,y = x \Leftrightarrow -\text{ημ}\,y \cdot y' = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\text{ημ}\,y} = -\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\text{συν}^2 y}}$

$y \in [0,\pi] \Rightarrow \text{ημ}\,y \geq 0$ Άρα

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{συν}^2 y}} \Rightarrow \boxed{\frac{d(\text{τοξσυν}\,x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)}$$