Διαφορικό

Βασικές σχέσεις

(1)

1) $f(x+h)-f(x)\simeq f'(x)h$ για h μικρό

2) $df(x)=f'(x)dx \quad (dx=h)$

Απόδειξη βασικών σχέσεων για το διαφορικό

1) $d(f+g)(x)=df(x)+dg(x)$

$d(f+g)(x)=(f+g)'(x)dx=(f'(x)+g'(x))dx=$
$df(x)+dg(x)$

2) $d(f\cdot g)(x) = f(x)\,dg(x) + g(x)\,df(x)$ 2

$\left((f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (f\cdot g)(x) = f(x)g(x),\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \right)$

$$d(f\cdot g)(x) = (f\cdot g)'(x)\,dx = \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx$$

$$= g(x)f'(x)\,dx + f(x)g'(x)\,dx =$$

$$= g(x)\,df(x) + f(x)\,dg(x)$$

3) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)\,dx = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,dx = \frac{g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)}{g^2(x)}$$

Ασκήσεις

1) Υπολογίστε την $\sqrt[3]{25}$ προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας τον τύπο του διαφορικού της συνάρτησης

Λύση

$$f(x+h)-f(x)\simeq f'(x)h \Longleftrightarrow f(x+h)\simeq f(x)+f'(x)h \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{25} \qquad f(x)=\sqrt[3]{x} \qquad x=27 \qquad h=-2$$

$$f(x+h)=\sqrt[3]{27+(-2)}\simeq\sqrt[3]{27}+\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=27}\cdot(-2) \quad (2)$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}}$$

Έχω: $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=27}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{27}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{27}$

Επομένως: $\sqrt[3]{25} \simeq \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(-2) = 3 - \frac{2}{27} = \frac{79}{27}$ (4)

Συμπέρασμα: $\sqrt[3]{25} \simeq \frac{79}{27}$

Άσκηση

2. Υπολογίστε με τον τύπο του διαφορικού το $\ln(1.01)$

Λύση

$f(x) = \ln x \quad x = 1 \quad h = 0{,}01 \qquad f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)h$ (1)

$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x)\big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$. Από (1) έχω:

$f(x+h) = \ln(1+0.01) = \ln(1.01) \simeq \ln 1 + 1 \cdot 0{,}01 \Rightarrow \ln(1.01) \simeq 0.01$

3

Άσκηση

Υπολογίστε προσεγγιστικά με τη χρήση διαφορικού το $1{,}01^{1{,}01}$

Λύση

$f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)h$ (1) $f(x) = x^x$, $x = 1$, $h = 0{,}01$

$(x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x\left(1\cdot\ln x + x\frac{1}{x}\right) =$

$= x^x(\ln x + 1)$. Έχουμε: $(x^x)'\big|_{x=1} = 1^1(\ln 1 + 1) = 1$

Από (1) έχω: $f(x+h) = 1{,}01^{1{,}01} \simeq 1^1 + 1\cdot 0{,}01 = 1{,}01$

4 Άσκηση 6

Να υπολογιστεί το $\sin(0,3)$ προσεγγιστικά με τον τύπο του διαφορικού

Λύση

$f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)h \quad (1)$ $\quad f(x) = \sin x,\ x=0,\ h=0,3$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(x)\big|_{x=0} \left(= f'(0)\right) = \cos x\big|_{x=0} = \cos 0 = 1$

Από (1) έχω: $f(x+h) = \sin(0+0,3) = \sin 0,3 \simeq \sin 0 + 1 \cdot 0,3$
$= 0 + 0,3 = 0,3$

Δηλαδή, $\sin 0,3 \simeq 0,3$ Γενικά: $\sin x \simeq x$ για μικρά x μετρημένα σε rad

$\sin x \simeq x$, x σε rad

$\ell = \underline{\underline{2\pi}}\, r$

Ένας κύκλος είναι 360° ή 2π rad

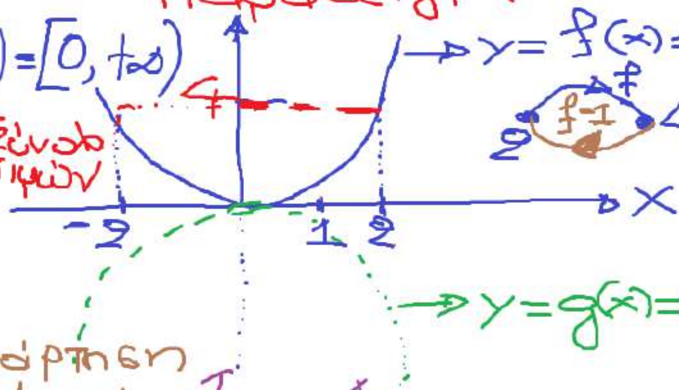
Αντίστροφη συνάρτηση (8)

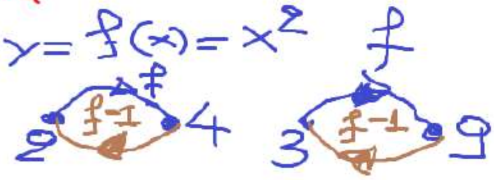
Παράδειγμα

$D(f)=\mathbb{R},\ R(f)=[0,+\infty)$ → $y=f(x)=x^2$

Πεδίο ορισμού

Σύνολο τιμών





→ $y=g(x)=-x^2$

Προσοχή

Την αντίστροφη συνάρτηση
Τη συμβολίζουμε f^{-1} αλλά $\frac{1}{f}=\frac{1}{x^2}$

$\boxed{f^{-1}} \neq \frac{1}{f}$

Πρόταση

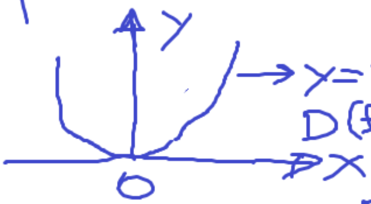
Για να οριστεί η αντίστροφη μιας συνάρτησης θα πρέπει η συνάρτηση να είναι 1-1 (ένα προς ένα) (δηλαδή διαφορετικά x του πεδίου ορισμού να απεικονίζονται σε διαφορετικά y του συνόλου τιμών).

Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση δεν είναι 1-1 μπορούμε να την κάνουμε 1-1 περιορίζοντάς τη σε κατάλληλο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και έτσι να την κάνουμε 1-1

Παράδειγμα

Περιορίζοντας την $y=f(x)=x^2$ με $D(f)=\mathbb{R}$, $R(f)=[0,+\infty)$ στο υποσύνολο $[0,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της προκύπτει μια νέα συνάρτηση που είναι 1-1 και επομένως έχει αντιστροφή. Δηλαδή



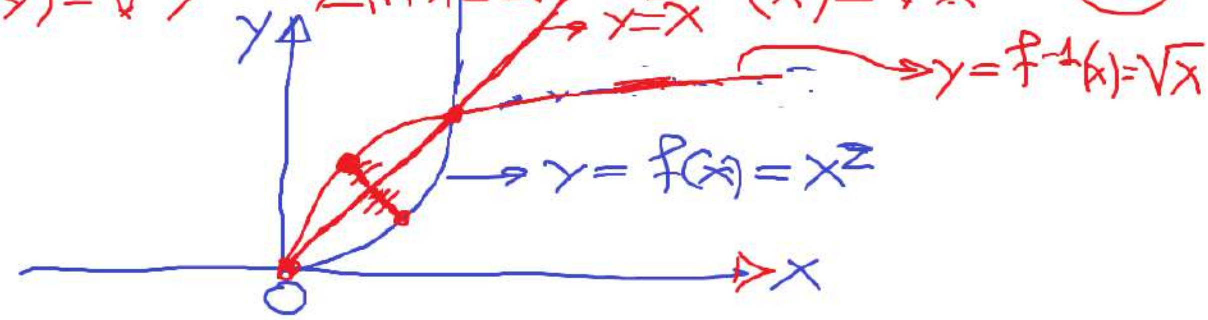
$\to y=f(x)=x^2$
$D(f)=\mathbb{R}$, $R(f)=[0,+\infty)$

Την περιορίζω:

$\to y=f(x)=x^2$
$D(f)=[0,+\infty)$
$R(f)=[0,+\infty)$

$y=f(x)=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$ Αλλά $x\geq 0$ Άρα
$x=f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ $D(f^{-1})=[0,+\infty)$, $R(f^{-1})=[0,+\infty)$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ Δηλαδή $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



Πρόταση

Οι γραφικές παραστάσεις των $y = f(x)$ και $y = f^{-1}(x)$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.