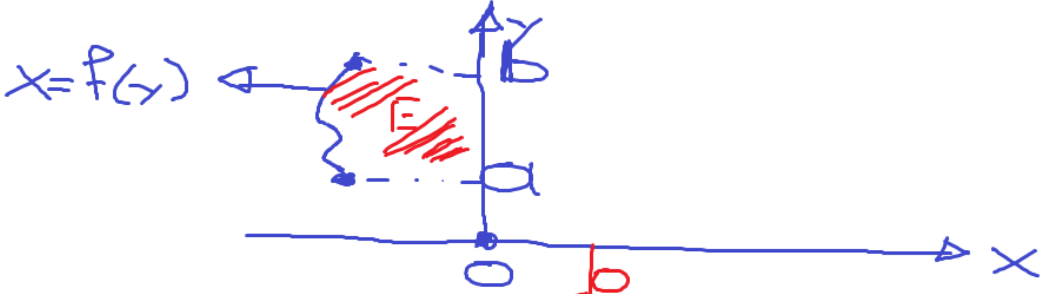
Ορισμένα ολοκληρώματα (1)

Εμβαδά ως προς τον άξονα y

1.

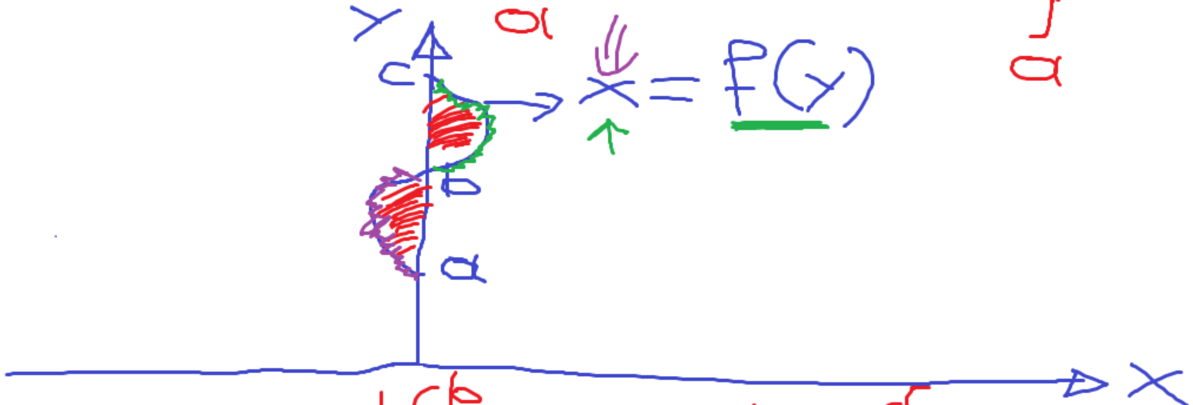
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy$$

2.



$$E = \left| \int_a^b f(y)\,dy \right| = \int_a^b |f(y)|\,dy$$

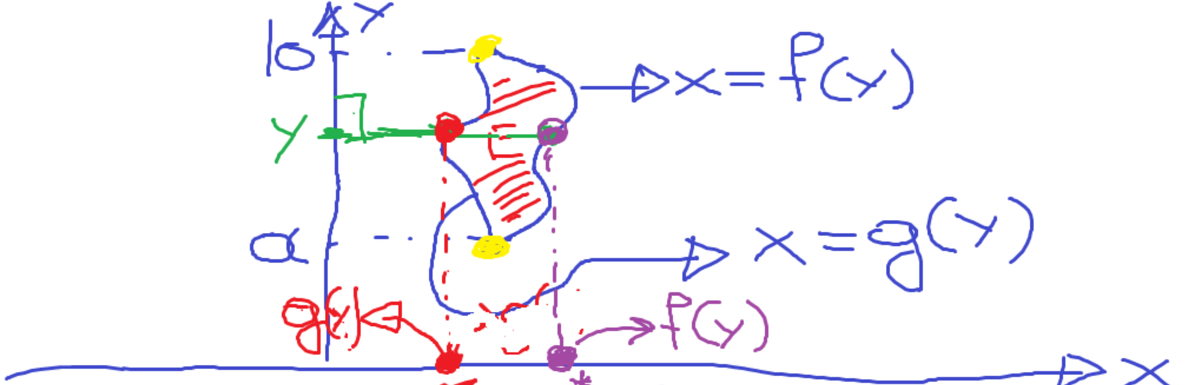
3.



$$E = \left| \int_a^b f(y)\,dy \right| + \int_b^c f(y)\,dy = \int_a^b |f(y)|\,dy + \int_b^c f(y)\,dy$$

③

4.



$x^* > x \Rightarrow f(y) > g(y) \quad \forall\, y \in [a,b]$

$$E = \int_a^b f(y)\,dy - \int_a^b g(y)\,dy =$$

$$= \int_a^b \big(f(y) - g(y)\big)\,dy$$

Βασικές Ιδιότητες Ορισμένων Ολοκληρωμάτων

1. $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. $$\int_a^b k f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$$

3. (Γενίκευση των 1 και 2: (1),(2) $\Longleftrightarrow$ (3))

$$\int_a^b \big(kf(x)+\lambda g(x)\big)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \lambda\int_a^b g(x)\,dx$$

4. $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad b\in[a,c]$$

5.

6

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

6.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \right)$$

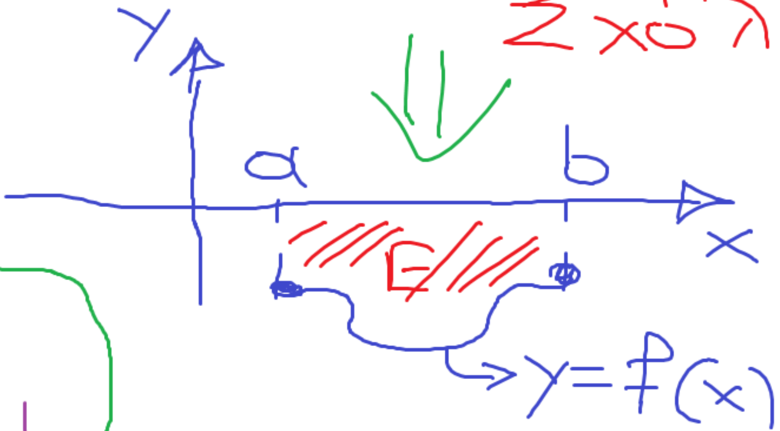
7. Αν $f(x) \geq 0$ στο $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ 7

8. Αν $f(x) \leq g(x)$ στο $[a,b]$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

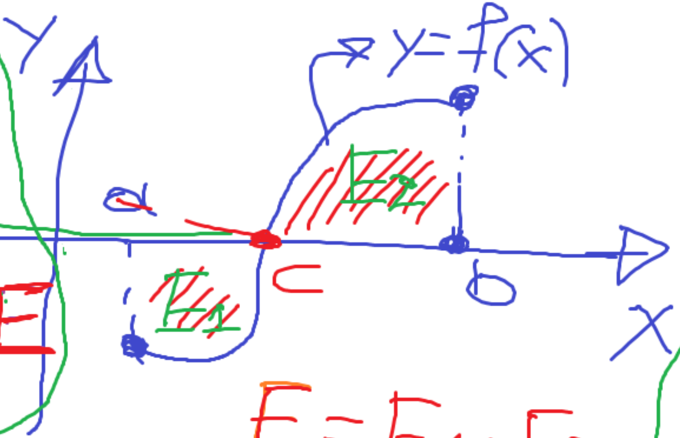
9. $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Σχόλιο στην ιδιότητα 7



$$E = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < \int_a^b |f(x)|\,dx = E$$



$$E \neq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < E$$

$$E = E_1 + E_2 = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b |f(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

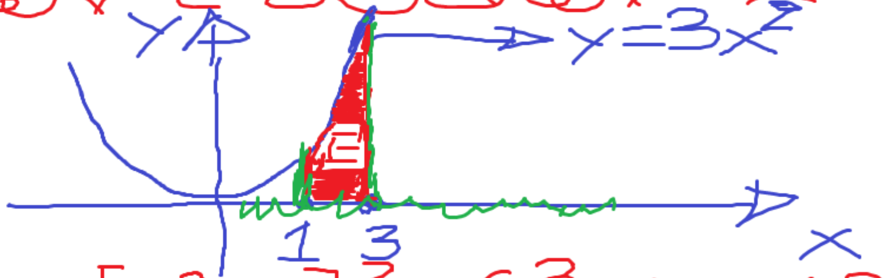
Θεώρημα

Έστω $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω ότι είναι συνεχής. Έστω $F(x)=\int f(x)\,dx$. Τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Εφαρμογές

1. Βρείτε το εμβαδό που περικλείεται μεταξύ της $y=3x^2$, του άξονα των x, και των ευθειών $x=1$, και $x=3$.



$$E=\int_1^3 3x^2\,dx=\left[x^3+c\right]_1^3=(3^3+c)-(1^3+c)=3^3-1^3+c-c$$

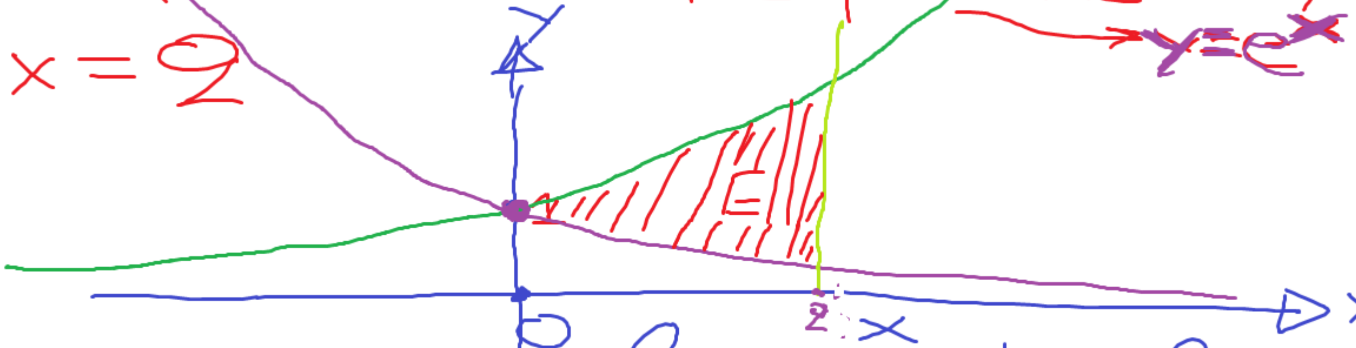
$=26$ τετραγωνικές μονάδες

2. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=e^x$, $y=e^{-x}$ και $x=2$

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} =$

2. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y=e^x$, $y=e^{-x}$ και $x=2$



$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$$E=\int_0^2 \left(e^x-e^{-x}\right)dx=\int_0^2 e^x dx-\int_0^2 e^{-x}dx=\left[e^x\right]_0^2-\left[-e^{-x}\right]_0^2=$$

$$= [e^{x}]_0^2 - [-e^{-x}]_0^2 = e^2 - e^0 - \left(-e^{-2} - (-e^{-0})\right)$$

$$= e^2 - 1 + \left(e^{-2} + (-1)\right) = e^2 + e^{-2} - 2$$

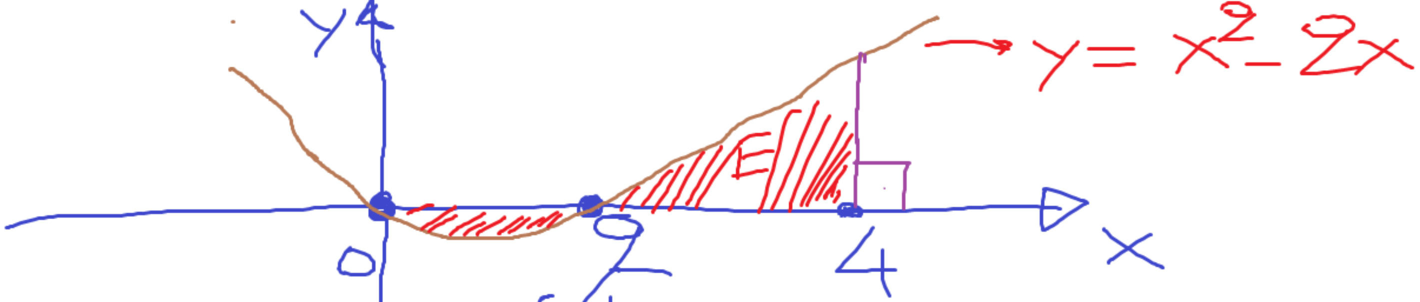
3. Βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες $y = x^2 - 2x$, $x = 4$ και του άξονα των x.

$y = x^2 - 2x = x(x-2)$ К4

Εκτός των ριζών ομόσημο του $\alpha = 1$. Εντός των ριζών ετερόσημο του α

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x) = +\infty$



$$E = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx \right| + \int_2^4 (x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \left[x^2\right]_0^2 \right| + \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 - \left[x^2\right]_2^4 =$$

$$\left| \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} - (2^2 - 0^2) \right| + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} - (4^2 - 2^2) = 8 \text{ ΤΕΤ. μον.}$$