Παρατήρηση ①

$$\int \frac{1}{(x-2)^2(x+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{\Gamma}{x+2} + \frac{\Delta}{(x+2)^2}$$

$$\frac{1}{(x+2)^2(x-2)^2} \overset{?}{=} \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{A(x^2-4x+4)+B(x^2+4x+4)}{(x+2)^2(x-2)^2} = \frac{(A+B)x^2+4(B-A)x+4(A+B)}{(x+2)^2(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow 1=(A+B)x^2+4(B-A)x+4(A+B) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ 4\cdot(B-A)=0 \\ (A+B)=1/4 \end{array}\right.$$

$$\boxed{1 = A(x-2)^2 + B(x+2)^2} \quad (*)$$

$$x=2 \Rightarrow 1=16B$$
$$x=-2 \Rightarrow 1=16A$$

Γ περίπτωση

$\frac{f(x)}{g(x)}$ Βαθμός $f(x)$ < Βαθμός $g(x)$

$g(x)$ έχει πραγματικές και μιγαδικές ρίζες

1.

Παράδειγμα

$$\int \frac{3x+1}{x^2+6x+10}\,dx$$

$\Delta = 6^2 - 4\cdot 10 = 36-40 = -4 < 0$

$$\frac{3x+1}{x^2+6x+10} = \frac{\frac{2}{3}(3x+1)}{\frac{2}{3}(x^2+6x+10)} = \frac{3}{2}\,\frac{2x+\frac{2}{3}}{x^2+6x+10} = \frac{3}{2}\,\frac{2x+6-6+\frac{2}{3}}{x^2+6x+10}$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{2x+6}{x^2+6x+10} + \frac{3}{2}\,\frac{-\frac{16}{3}}{x^2+6x+10}$$

③

$$\int \frac{3x+1}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10} + \frac{3}{2}\left(-\frac{16}{3}\right)\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\ln|x^2+6x+10| + C_1\right) - 8\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx$$

$\Delta < 0$ $\Delta < 0$

$$x^2+6x+10 = x^2+2\cdot 3x+3^2-3^2+10 = (x+3)^2+1$$

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+3)^2}\,dx$$

$$\omega = x+3 \Rightarrow d\omega = (x+3)'\,dx \Rightarrow d\omega = dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega = \tau o\xi\varepsilon\varphi\,\omega + C_1 =$$

$$= \tau o\xi\varepsilon\varphi(x+3) + C_1$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+6x+10| + \frac{3}{2}c - 8\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi(x+3) + C_1\right)$$

$\Delta<0$

$x^2+6x+10>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+6x+10) - 8\tau o\xi\varepsilon\varphi(x+3) + \frac{3}{2}c - 8C_1$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+6x+10) - 8\tau o\xi\varepsilon\varphi(x+3) + C' \quad C' = \frac{3}{2}c - 8C_1$$

$c, C_1 \in \mathbb{R}, \ C' \in \mathbb{R}$

④

Απλές πραγματικές και μιγαδικές

$$\int \frac{1}{x(x+3)(x^2-x+1)}dx \qquad \frac{1}{x(x+3)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2-x+1}$$

$\Delta < 0$ $\qquad$ $\Delta < 0$

Απλές πραγματικές, πολλαπλές πραγματικές και μιγαδικές

$$\int \frac{1}{x^2(x+3)(x-1)^2(x^2+6x+10)}dx, \quad \frac{1}{x^2(x+3)(x-1)^2(x^2+6x+10)} =$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x+3} + \frac{\Delta}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2} + \frac{\Sigma x + H}{x^2+6x+10} \quad \Delta < 0$$

Παρατήρηση

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$$

Υποθέσαμε ότι βαθμός $f(x)$ < βαθμός $g(x)$

Όταν ο βαθμός $f(x) \geq$ βαθμός $g(x)$ τότε πρώτα κάνουμε τη διαίρεση

Διαιρετέος $\longrightarrow$ $f(x) \mid g(x)$ $\longleftarrow$ Διαιρέτης

$\pi(x)$ $\longleftarrow$ πηλίκο

$\upsilon(x)$ $\longleftarrow$ $\underbrace{\text{Βαθμός } \upsilon(x) < \text{Βαθμός } g(x)}$

$$f(x) = g(x)\pi(x) + \upsilon(x) \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{g(x)}$$

Βαθμός $\upsilon(x)$ < Βαθμός $g(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{g(x)}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \pi(x)dx + \int \frac{\upsilon(x)}{g(x)}dx$$

Παράδειγμα

$$\int \frac{x-2}{x-3}dx$$

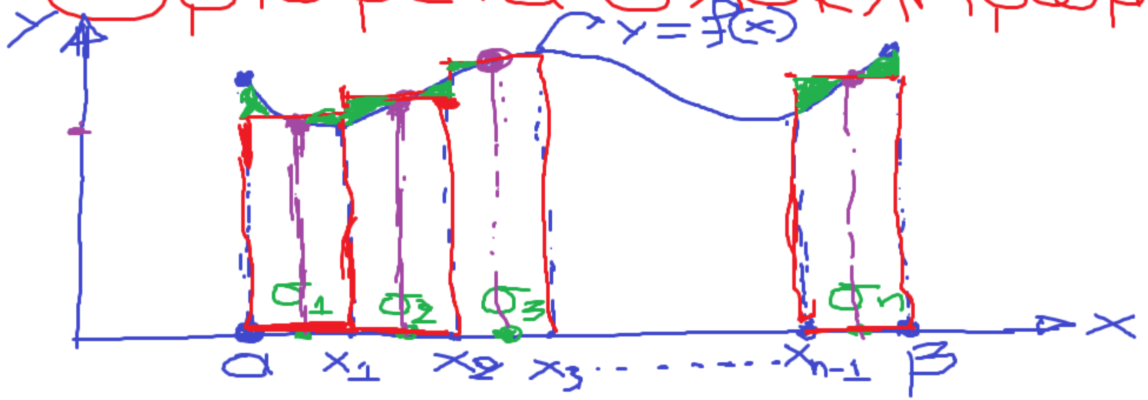
$$\begin{array}{r|l} x-2 & x-3 \\ \hline -\;x-3 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$x-2 = (x-3)\cdot 1 + 1 \Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = \underset{\pi(x)}{1} + \frac{\overset{\upsilon(x)}{1}}{x-3}$$

$$\int \frac{x-2}{x-3}dx = \int\left(1 + \frac{1}{x-3}\right)dx = \int 1dx + \int \frac{1}{x-3}dx = x + c_1 + \ln|x-3| + c_2$$

$= x + \ln|x-3| + c_1 + c_2 = x + \ln|x-3| + C_1, \quad C_1 = c_1 + c_2, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \; C_1 \in \mathbb{R}$

Ορισμένα ολοκληρώματα ⑧



Προσεγγίζω το εμβαδό κάτω από τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$ με το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων

$$\sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i)\,\Delta x_i, \quad \Delta x_i = [x_i - x_{i-1}], \; \alpha = x_0, \; \beta = x_n$$

Ορισμός

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i)\Delta x_i = \int_a^b \underbrace{f(x)dx}$$

↳ Εμβαδό παραλληλογράμμου με απειροστή βάση

$\int \rightarrow$ Sum (Άθροισμα)

Το $\int_a^b f(x)dx$ ισούται με το εμβαδό της γραφοσκιασμένης περιοχής

Αν Ε είναι το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής έχω

$$E=\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$$

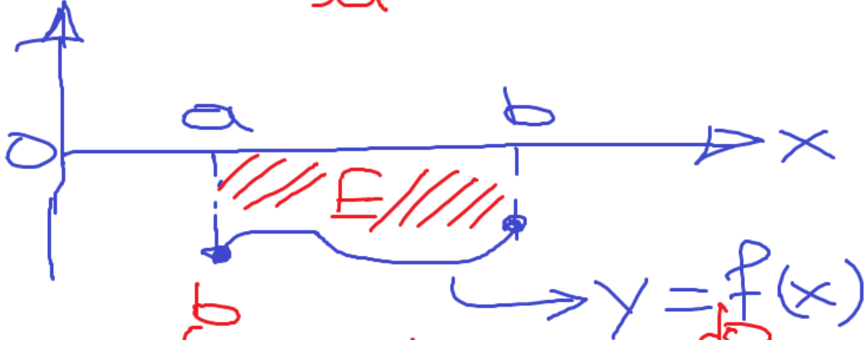
Το $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ λέγεται ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ από το α στο b, ή στο διάστημα $[\alpha,b]$

Υπολογισμός εμβαδών με χρήση ορισμένων ολοκληρωμάτων

I

$$E=\int_a^b f(x)\,dx$$

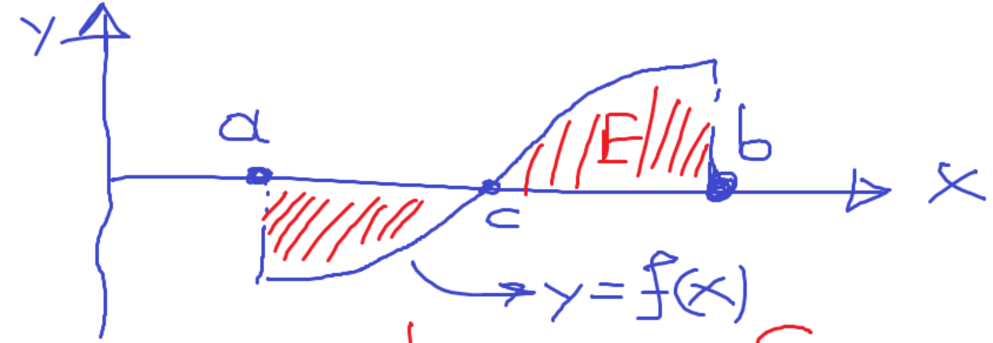
II



ΓΕΝΙΚΑ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ
ΕΔΩ ΙΣΧΥΕΙ

$$E=\int_a^b\left(-f(x)\right)dx=\int_a^b|f(x)|\,dx=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

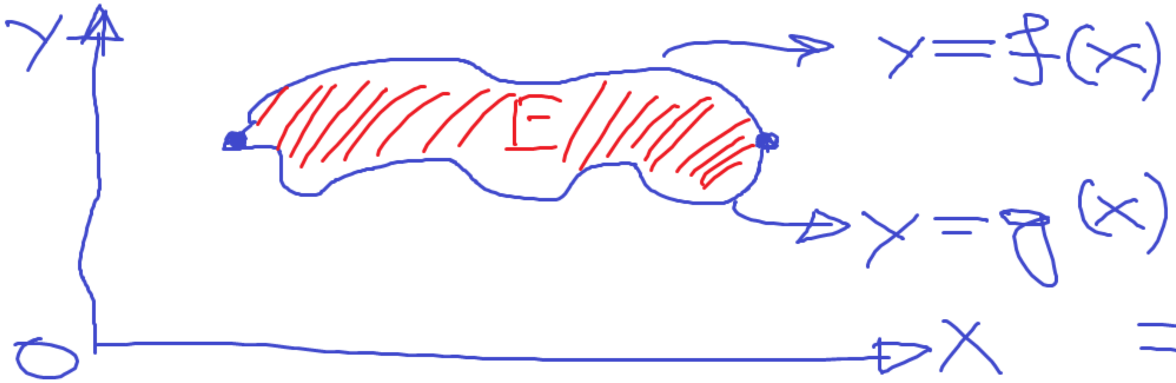
III



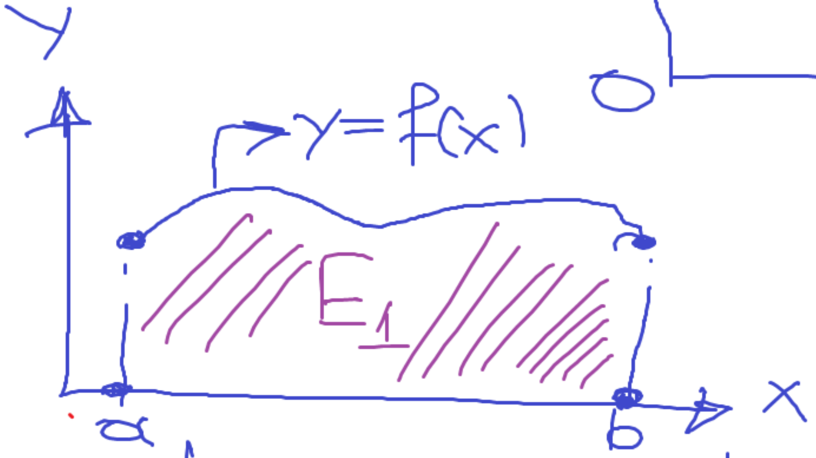
$$E = \int_a^c \left(-f(x)\right) dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \left| \int_a^c f(x)\,dx \right| + \int_c^b f(x)\,dx$$

IV



=



—

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$