Ολοκληρώματα που απαιτούν και τις δύο μεθόδους ολοκλήρωσης με αντικατάσταση και παραγοντική ολοκλήρωση (1)

Παραδείγματα

1. Υπολογίστε το $I=\int \frac{x}{συν^2x}\,dx$

Παραγοντική

$$I=\int \frac{1}{συν^2x}\,x\,dx=\int (εφx)'\,x\,dx=$$

$$xεφx-\int εφx\,x'\,dx=xεφx-\int εφx\,dx=xεφx-\int \frac{ημx}{συνx}\,dx$$

1ος Τρόπος

Βασικό ολοκλήρωμα: $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+c}$

$$I = x\varepsilon\varphi x - \underbrace{\int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = x\varepsilon\varphi x + \int \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx$$ ②

$$= x\varepsilon\varphi x + \int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx = x\varepsilon\varphi x + \ln|\sigma\upsilon\nu x| + c,$$

$c \in \mathbb{R}$

2^{os} τρόπος

Με αντικατάσταση

Θέτω $\omega = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow d\omega = d(\sigma\upsilon\nu x) = (\sigma\upsilon\nu x)' dx = -\eta\mu x\, dx$

$$-\int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx = \int \frac{1}{\omega}d\omega = \ln|\omega| + c = \ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$$

Επομένως $I = x\varepsilon\varphi x + \ln|\sigma\upsilon\nu x| + c,\ c \in \mathbb{R}$

2. Υπολογίστε το $I=\int \eta\mu(\ln x)\,dx$

Θέτω $\boxed{\omega=\ln x} \Rightarrow d\omega=d(\ln x)=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow d\omega=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \boxed{dx=x\,d\omega}$

$\omega=\ln_e x \Leftrightarrow \boxed{x=e^{\omega}}$

$\Downarrow$

$\boxed{dx=e^{\omega}d\omega}$

$e \simeq 2.7$

Έχω επομένως

$I=\int e^{\omega}\,\eta\mu\omega\,d\omega=\int (e^{\omega})'\eta\mu\omega\,d\omega=e^{\omega}\eta\mu\omega-\int e^{\omega}(\eta\mu\omega)'d\omega$

$=e^{\omega}\eta\mu\omega-\int e^{\omega}\sigma\upsilon\nu\omega\,d\omega=e^{\omega}\eta\mu\omega-\int (e^{\omega})'\sigma\upsilon\nu\omega\,d\omega=e^{\omega}\eta\mu\omega-\big(e^{\omega}\sigma\upsilon\nu\omega$

4

$$I=\int e^{\omega}\eta\mu\omega\,d\omega=e^{\omega}\eta\mu\omega-\left(e^{\omega}\sigma\upsilon\nu\omega-\int e^{\omega}(\sigma\upsilon\nu\omega)'\,d\omega\right)$$

$$\Rightarrow I=e^{\omega}\eta\mu\omega-e^{\omega}\sigma\upsilon\nu\omega-\underbrace{\int e^{\omega}\eta\mu\omega\,d\omega}_{=I}$$

$$\Rightarrow 2I=e^{\omega}(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^{\omega}(\eta\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^{\ln x}\left(\eta\mu(\ln x)-\sigma\upsilon\nu(\ln x)\right)$$

Τελικά $I=\frac{1}{2}x\left(\eta\mu(\ln x)-\sigma\upsilon\nu(\ln x)\right)+\boxed{c_1}$, $c_1\in\mathbb{R}$

3. Υπολογίστε το $I=\int x\,ημ(αx+b)\,dx$

$$I = -\frac{1}{α}\int x\,\boxed{α(-ημ(αx+b))}\,dx = -\frac{1}{α}\int x\,(συν(αx+b))'\,dx$$

$$= -\frac{1}{α}\left(x\,συν(αx+b) - \int x'\,συν(αx+b)\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{α}\left(x\,συν(αx+b) - \int συν(αx+b)\,dx\right) = -\frac{1}{α}\left(x\,συν(αx+b) - \left(\frac{ημ(αx+b)}{α}+c\right)\right)$$

Διότι $\left(\frac{ημ(αx+b)}{α}+c\right)' = \frac{1}{α}\,συν(αx+b)\,(αx+b)' = \frac{1}{\cancel{α}}\,συν(αx+b)\,\cancel{α}$

Τελικά $I = -\frac{1}{α}\,x\,συν(αx+b) + \frac{1}{α^2}\,ημ(αx+b) + \frac{1}{α}c$

Υπολογισμός του $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+b)\,dx$ με αντικατάσταση

Θέτω $\boxed{\omega=\alpha x+b} \Rightarrow d\omega = d(\alpha x+b) = (\alpha x+b)'\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow d\omega = \alpha\,dx \Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{\alpha}\,d\omega}$$

Έχω $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+b)\,dx = \int \sigma\upsilon\nu\omega \frac{1}{\alpha}\,d\omega = \frac{1}{\alpha}\int \sigma\upsilon\nu\omega\,d\omega$

$$= \frac{1}{\alpha}(\eta\mu\omega + c) = \frac{1}{\alpha}(\eta\mu(\alpha x+b)+c) = \frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha x+b) + \frac{1}{\alpha}c$$

$$= \frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha x+b) + c_1, \quad c\in\mathbb{R},\ c_1\in\mathbb{R},\ c_1 = \frac{c}{\alpha}$$

Προσέξτε ολοκληρώματα που φαίνονται δύσκολα και είναι απλά.

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $I = \int \varepsilon\varphi^2 x \, dx$

1ος τρόπος

$\omega = \varepsilon\varphi x \Rightarrow d\omega = d(\varepsilon\varphi x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \Rightarrow dx = \sigma\upsilon\nu^2 x \, d\omega$

$\omega^2 = \varepsilon\varphi^2 x \Rightarrow 1+\omega^2 = 1+\varepsilon\varphi^2 x \Rightarrow 1+\omega^2 = 1+\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\omega^2}$ $\quad dx = \frac{1}{1+\omega^2} d\omega$ $\quad I = \int \omega^2 \frac{1}{1+\omega^2} d\omega$

$$I = \int \text{εφ}^2 x \, dx \qquad \omega = \text{εφ}x \qquad I = \int \frac{\omega^2}{1+\omega^2}\, d\omega$$

$$I = \int \frac{\omega^2 + 1 - 1}{1+\omega^2}\, d\omega = \int \frac{1+\omega^2}{1+\omega^2}\, d\omega - \int \frac{1}{1+\omega^2}\, d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int d\omega - \left(\text{τοξεφ}\,\omega + c_1\right) = (\omega + c_2) - \text{τοξεφ}\,\omega - c_1$$

$$\Rightarrow I = \omega - \text{τοξεφ}\,\omega + c_2 - c_1 \Rightarrow I = \text{εφ}x - \text{τοξεφ}(\text{εφ}x) + C$$

$$x \underset{\text{τοξεφ}}{\overset{\text{εφ}}{\rightleftarrows}} \text{εφ}x$$

Αφού $\text{τοξεφ}(\text{εφ}x) = x$

Τελικό: $\boxed{I = \text{εφ}x - x + C}$, $C = c_1 - c_2$, $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$

Β τρόπος

$$I = \int \varepsilon\varphi^2 x \, dx$$

$$I = \int \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \qquad \boxed{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1}$$

Άρα $I = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx - \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \boxed{\int (\varepsilon\varphi x)' dx} - \int 1 \, dx$

$\Rightarrow I = \varepsilon\varphi x + C_1 - (x + C_2) = \varepsilon\varphi x - x + C_1 - C_2 = \varepsilon\varphi x - x + C',$

$C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C' \in \mathbb{R}$. Βασικός τύπος: $\boxed{\int F'(x) dx = F(x) + C}$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$I = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx,$$ $f(x), g(x)$ πολυώνυμα

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Βαθμός$(f(x))$ < Βαθμός$(g(x))$ ΚΑΙ το $g(x)$ έχει απλές πραγματικές ρίζες.

Παραδείγματα

1)

$$I=\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

1ος τρόπος

$$I=\int \frac{1}{x-3}\,dx=\int \frac{(x-3)'}{x-3}\,dx=\ln|x-3|+c$$

Βασικά ολοκληρώματα $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+c$

2ος τρόπος

Θέτω $\omega=x-3 \Rightarrow d\omega=d(x-3)=(x-3)'dx \Rightarrow \boxed{d\omega=dx}$

$$I=\int \frac{1}{\omega}\,d\omega=\ln|\omega|+c=\ln|x-3|+c$$