Παράδειγμα

1

Υπολογίστε το $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

Υπολογισμός εφαρμόζοντας τις ιδιότητες

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

$$\alpha = 3 \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \beta = -2 \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 3\int \sqrt{x}\,dx + (-2)\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= 3\int x^{1/2}dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c_1\right)-2\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c_2\right)$$

$$= 3\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c_1\right)-2\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c_2\right)$$

$$= 3\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+c_1\right)-2\left(2x^{\frac{1}{2}}+c_2\right)$$

$$= 2x^{\frac{3}{2}}+3c_1-4x^{\frac{1}{2}}-2c_2$$

$$= 2x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+3c_1-2c_2 = 2x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+c',$$

$c' = 3c_1-2c_2$, $c' \in \mathbb{R}$.

② $\Rightarrow$ Χρησιμοποιώ

$$\int x^{a}dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+c,\ a\neq -1$$

Παρατήρηση

Πολλές φορές πρέπει να κάνουμε ένα μετασχηματισμό για να μετατρέψουμε ένα ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα βασικών συναρτήσεων. Έτσι έχουμε τρεις μεθόδους ολοκλήρωσης: 1) Μέθοδος αντικατάστασης 2) Μέθοδος παραγοντικής ολοκλήρωσης 3) Συνδυασμός των 1) και 2)

Μέθοδος της Αντικατάστασης

Αυτή εφαρμόζεται συνήθως σε ολοκληρώματα της μορφής $\int f(g(x))g'(x)dx$. Βολεύει τότε να αντικαταστήσουμε το $g(x)$ με μία νέα μεταβλητή ω. Έχουμε τότε

Αντικαθιστούμε το $g(x)$ με ω

$$\boxed{\omega = g(x)} \Longrightarrow d\omega = dg(x) = g'(x)dx$$

Δηλαδή $$\boxed{d\omega = g'(x)dx}$$

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(\omega)d\omega$. Το ολοκλήρωμα $\int f(\omega)d\omega$ είναι απλούστερο από το αρχικό $\int f(g(x))g'(x)dx$. Αν συμβεί το $\int f(\omega)d\omega$ να

Το $\int f(\omega)d\omega$ να είναι ένα από τα ολοκληρώματα 5

τα του πίνακα των ολοκληρωμάτων των βασικών συναρτήσεων τότε υπολογίζαμε το ολοκλήρωμα.

Παραδείγματα

1) Υπολογίστε το $\int \frac{dx}{2x+3}$.

Υπολογισμός

$$\int \frac{dx}{2x+3} = \int \frac{1}{2x+3}\,dx.$$ Θέτω $\omega = 2x+3 \Rightarrow d\omega = d(2x+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow d\omega = (2x+3)'dx \Rightarrow d\omega = 2\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = \frac{d\omega}{2}$

$\boxed{dx = \frac{d\omega}{2}}$ Επομένως $\int \frac{1}{2x+3}dx = \int \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{2} =$ 6

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\omega}d\omega = \frac{1}{2}\left(\ln|\omega| + c\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|2x+3| + c\right)$

$= \frac{1}{2}\ln|2x+3| + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c', \quad c' = \frac{1}{2}c,$

$c' \in \mathbb{R}$

Σύνδεση με Μεθοδολογία: $\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx}$: $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = 2x+3$

$f(g(x)) = \frac{1}{2x+3}, \quad g'(x) = (2x+3)' = 2$

2) Υπολογίστε το $\int \frac{1}{(3-2x)^3}dx$ (7)

Υπολογισμός, Α τρόπος

Θέτω $\omega = 3-2x \Rightarrow d\omega = (3-2x)'dx \Rightarrow d\omega = -2dx \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = -\frac{1}{2}d\omega$

$$\int \frac{1}{(3-2x)^3}dx = \int \frac{1}{\omega^3}\left(-\frac{1}{2}d\omega\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\omega^3}d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \omega^{-3}d\omega = -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^{-3+1}}{-3+1}+c\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^{-2}}{-2}+c\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\omega^{-2} - \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}\frac{1}{\omega^2} + c' = \frac{1}{4}\frac{1}{(3-2x)^2} + c', \quad c' = -\frac{1}{2}c, \; c \in \mathbb{R}, \; c' \in \mathbb{R}$$

Β τρόπος

$$\int \frac{1}{(3-2x)^3}dx$$

Θέτω $\boxed{\theta = (3-2x)^3} \Rightarrow d\theta = \left[(3-2x)^3\right]' dx = 3(3-2x)^2(-2)dx$

$\Rightarrow d\theta = -6(3-2x)^2 dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{6}\frac{1}{(3-2x)^2}d\theta$

$\theta = (3-2x)^3 \Rightarrow \theta^{\frac{2}{3}} = \left[(3-2x)^3\right]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \theta^{\frac{2}{3}} = (3-2x)^2$

Επομένως $\boxed{dx = -\frac{1}{6}\frac{1}{\theta^{2/3}}d\theta}$. Αντικαθιστώντας παίρνω:

$$\int \frac{1}{(3-2x)^3}\,dx = \int \frac{1}{\theta}\left(-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{\theta^{2/3}}\,d\theta =$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{\theta\,\theta^{2/3}}\,d\theta = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{\theta^{5/3}}\,d\theta = -\frac{1}{6}\int \theta^{-5/3}\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{\theta^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + c\right) = -\frac{1}{6}\left(\frac{\theta^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + c\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\,\frac{1}{-\frac{2}{3}}\,\theta^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}c = \frac{1}{6}\,\frac{3}{2}\,\theta^{-\frac{2}{3}} + c' = \frac{1}{4}\left[(3-2x)^3\right]^{-\frac{2}{3}} + c'$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{(3-2x)^2} + c', \quad c' = -\frac{1}{6}c,\ c\in\mathbb{R},\ c'\in\mathbb{R}$$

Σύνδεση με μεθοδολογία του Α τρόπου $\underline{1}$ο

$\frac{1}{(-2)}\int \frac{1\,(-2)}{(3-2x)^3}dx$, $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $g(x)=3-2x$, $g'(x)=-2$

Άρα το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(3-2x)^3}dx$ είναι της μορφής $\boxed{\int f(g(x))\,g'(x)\,dx}$ με $f(x)=\frac{1}{x^3}$, $g(x)=3-2x$

3) Υπολογίστε το $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{x}{x^2+1}dx$

Υπολογισμός

Σύνδεση με μεθοδολογία:

$f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2+1$, $f(g(x))=\frac{1}{x^2+1}$, $g'(x)=2\cdot x$

Θέτω $\omega = g(x) = x^2+1 \Rightarrow d\omega = (x^2+1)' dx \Rightarrow$

$\Rightarrow d\omega = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2} d\omega$

Έχω: $\omega = x^2+1$, $\underline{x}\,dx = \frac{1}{2} d\omega$. Αντικαθιστώ και έχω:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{\omega} \frac{1}{2} d\omega = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\omega} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|\omega| + c\right) = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2}c \underset{x^2+1>0}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c_1,$$

$c_1 \in \mathbb{R}$