Παραγώγιση συναρτήσεων που δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή.

Συνήθως οι συναρτήσεις δίνονται στη μορφή
$y=f(x)$, π.χ., $y=x$, $y=x^3+2$, $y=(\ln x)^2$, $y=\sin x+e^x$, κ.ο.κ.
Αυτή η μορφή, δηλ. η μορφή $y=f(x)$ λέγεται λυμένη μορφή γιατί μπορούμε να λύσουμε ως προς y και έτσι από τη μία μεριά της ισότητας να έχουμε y και από την άλλη x.

Γενικά μία συνάρτηση δεν μπορούμε να τη φέρουμε σε λυμένη μορφή. Για παράδειγμα αν έχω τη συνάρτηση $e^{xy}=x+y$ δεν μπορώ να τη φέρω σε λυμένη μορφή. Αν προσπαθήσω 2

$$e^{xy}=x+y \Rightarrow \ln e^{xy}=\ln(x+y) \Rightarrow xy=\ln(x+y)$$

$$\Rightarrow y=\frac{\ln(x+y)}{x}$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφεί $\boxed{F(x,y)=0}$,

$\boxed{F(x,y)=e^{xy}-x-y}$. Η μορφή αυτή λέγεται πεπλεγμένη μορφή.

Άλλο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $xy - \ln y = y$ (3)
Αυτή η συνάρτηση δε μπορεί να γραφεί σε
λυμένη μορφή $y = f(x)$.

Παραγώγιση συναρτήσεων που δεν μπορούν να γραφούν σε λυμένη μορφή

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί η $\boxed{\dfrac{dy}{dx}}$ της συνάρτησης $e^{xy} = x + y$

Έχω: $(e^{xy})' = (x+y)' \Rightarrow e^{xy}(xy)' = 1 + y' \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{xy}(x'y+xy')=1+y' \Rightarrow e^{xy}(y+xy')=1+y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{xy}y+e^{xy}xy'-y'=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(e^{xy}x-1)=1-e^{xy}y \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1-e^{xy}y}{e^{xy}x-1}}$$

Το y είναι εξαρτημένη μεταβλητή

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

Το x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και παραγωγίζω ως προς x

(4)

B τρόπος

5

$e^{xy} = x+y$ Βρήκα $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}$

$e^{xy} = x+y \Leftrightarrow e^{xy} - x - y = 0$, $\underbrace{F(x,y) = e^{xy} - x - y}$

$\boxed{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}} = \frac{\partial (e^{xy} - x - y)}{\partial x} = e^{xy} y - 1 - 0 = e^{xy} y - 1$

$\boxed{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = \frac{\partial (e^{xy} - x - y)}{\partial y} = e^{xy} x - 0 - 1 = e^{xy} x - 1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = -\frac{ye^{xy}-1}{xe^{xy}-1} = \frac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}-1} \quad (6)$$

που

Είναι το αποτέλεσμα που βρήκαμε με τον πρώτο τρόπο.

2 Δίνεται η συνάρτηση $e^{xy} = x + y$

Βρείτε την παράγωγο $\dfrac{dx}{dy}$ ← εξαρτημένη μεταβλητή ← ανεξάρτητη ως προς αυτήν θα παραγωγίσω

$x = x(y)$ Α τρόπος

$$e^{xy} = x + y \Rightarrow \left(e^{xy}\right)' = (x+y)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{xy}(xy)' = x' + 1 \Rightarrow e^{xy}(x'y + x \cdot 1) = x' + 1$$

$$\Rightarrow e^{xy}x'y + e^{xy}x = x' + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'\left(e^{xy}y - 1\right) = 1 - e^{xy}x \Rightarrow \boxed{x' = \frac{1 - e^{xy}x}{e^{xy}y - 1}}$$

B τρόπος ③

$$e^{xy} = x + y \Leftrightarrow e^{xy} - x - y = 0, \quad F(x,y) = e^{xy} - x - y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(e^{xy} - x - y\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) - \frac{\partial}{\partial y}x - \frac{\partial}{\partial y}y =$$

$$= e^{xy}x - 0 - 1 = e^{xy}x - 1$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (e^{xy} - x - y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) - \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial x}y =$$

$$= e^{xy}y - 1 - 0 = e^{xy}y - 1$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}} = -\frac{xe^{xy} - 1}{e^{xy}y - 1} = \frac{1 - xe^{xy}}{e^{xy}y - 1}$$

που είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο πρώτο τρόπο.

Παρατηρηση

$$e^{xy} = x+y$$

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - ye^{xy}}{e^{xy}x - 1}$ $\qquad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1 - xe^{xy}}{e^{xy}y - 1}$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$y' \cdot x' = 1$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$. 11

Βρείτε τη $\frac{dy}{dx}=(y')$

$\Leftarrow$ Α τρόπος

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)'+\left(\frac{y}{x}\right)'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x'y-xy'}{y^2}+\frac{y'x-yx'}{x^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y-xy'}{y^2}+\frac{y'x-y}{x^2}=0 \Rightarrow$$

(12)

$$\Rightarrow y'\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}}$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=1$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1=0$$

B τρόπος

$$F(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{\partial 1}{\partial x}=$$

$$=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$$

$$x\cdot\frac{1}{x}$$

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1$$ (13)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial y} 1 = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} - 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}} = -\frac{\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}} = \frac{\frac{y}{x^2} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}}$$ που

είναι το ίδιο με αυτό που βρήκαμε σταν πρώτο τρόπο