Άσκηση

1

Να λυθεί η εξίσωση $4x^3+16x^2-9x-36=0$ αν γνωρίζουμε ότι 2 ρίζες είναι αντίθετες.

Λύση

$$f(x)=4x^3+16x^2-9x-36$$

ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ VIETTA

1) $\rho_1+\rho_2+\rho_3=-\dfrac{16}{4}=-4$ (1) Γραμμική εξίσωση

2) $\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3=\dfrac{-9}{4}$ (2) Μή Γραμμική εξίσωση

3) $\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_3=-\dfrac{-36}{4}=9$ (3) Μή Γραμμική εξίσωση

4) $\rho_1+\rho_2=0$ (από εκφώνηση) Γραμμική εξίσωση

Το σύστημα των Τύπων του Vietta (1),(2),(3) είναι μη γραμμικό σύστημα γιατί οι (2),(3) είναι μη γραμμικές. Μπορούμε να λύσουμε το σύστημα αυτό και να βρούμε τα ρ_1,ρ_2,ρ_3. Αντικαθιστούμε ωστόσο την (3) με την (4) που είναι γραμμική και έτσι η επί- 2

λυση του συστήματος γίνεται πιό εύκολη.

Δηλαδή τώρα αντί να λύσω το σύστημα των (1), (2), (3) λύνω το σύστημα των (1), (4), (2):

(1) $\rho_1+\rho_2+\rho_3=-4$

(4) $\rho_1+\rho_2=0$

(2) $\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3=-\frac{9}{4}$

(1), (4) $\Rightarrow \boxed{\rho_3=-4}$

(2) $\Rightarrow \rho_1\rho_2+(\rho_1+\rho_2)\rho_3=-\frac{9}{4}\Rightarrow \rho_1\rho_2=-\frac{9}{4}\Rightarrow (\rho_1+\rho_2=0)$

$\Rightarrow -\rho_1^2=-\frac{9}{4}\Rightarrow \rho_1^2=\frac{9}{4}\Rightarrow \boxed{\rho_1=\pm\frac{3}{2}}$ Συμπέρασμα:

$\rho_1=\frac{3}{2}$, $\rho_2=-\frac{3}{2}$, $\rho_3=-4$. Στο ίδιο συμπέρασμα αν αρχίσω $\rho_1=-\frac{3}{2}$.

Ασκήσεις

1 (Τύποι του Vietta) Να βρεθούν οι ρίζες του $f(x)=2x^3-x^2-22x-24$, αν γνωρίζουμε ότι δύο από αυτές έχουν λόγο $\frac{3}{4}$ (Δηλ. $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{3}{4}$)

2 Προσδιορίστε τις ποσότητες Α και Β προκειμένου το πολυώνυμο $f(x)=x^4+\frac{8}{3}x^2-\frac{16}{3}x+5$ να τίθεται στη μορφή $A(x+\alpha)^4+B(x+\beta)^4$ με $\alpha\neq\beta$, α και β δεδομένοι αριθμοί.

Δεδομένα: $\alpha, \beta, \alpha\neq\beta$ Ζητούμενα: Α, Β

$$f(x)=A(x+\alpha)^4+B(x+\beta)^4$$

③ (Διαιρετότητα πολυωνύμων) Άσκηση

Έστω πολυώνυμο $f(x)$. Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με $x-2$ είναι $υ_1=1$ και έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με $2x+1$ είναι $υ_2=2$. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το γινόμενο $(x-2)(2x+1)$.

Υπόδειξη

$$f(x)=(x-2)\pi_1(x)+1$$

$$f(x)=(2x+1)\pi_2(x)+2$$

$$f(x)=\underbrace{(2x+1)(x-2)}_{\text{Διαιρέτης}}\pi(x)+\underbrace{Ax+B}_{\text{Υπόλοιπο}}$$

Διαιρετέος

Παρατήρηση

$x^2 - 5x + 6$

$$\rho_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

Δηλαδή οι ρίζες ρ_1, ρ_2 εκφράζονται με τις τέσσερις βασικές πράξεις μεταξύ των συντελεστών του πολυωνύμου και τη χρήση ριζικών

Οι ρίζες επίσης των πολυωνύμων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού εκφράζονται επίσης με τις τέσσερις βασικές πράξεις και τη χρήση ριζικών.

Γενικά οι ρίζες πολυωνύμων $5^{ου}$ και ανωτέρου βαθμού δεν εκφράζονται με τις τέσσερις πράξεις και τη χρήση ριζικών (Galois).

Γενίκευση της Θεωρίας του Galois δόθηκε από τον Lie για

για τις διαφορικές εξισώσεις. Εφαρμογή της Θεωρίας Του Lie γίνεται ευρύτατα και στα οικονομικά φαινόμενα. 6

Όριο συνάρτησης και συνέχεια συνάρτησης

Παραδείγματα

1) $\lim_{x\to 2}(2x+1)=2\cdot 2+1=5$. Αν $f(x)=2x+1$

Δηλαδή $\boxed{\lim_{x\to 2} f(x)=f(2).}$ Δηλαδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$ του πεδίου ορισμού της.

Γενικά η $f(x)$ είναι συνεχής $\forall x \in D(f)=\mathbb{R}$

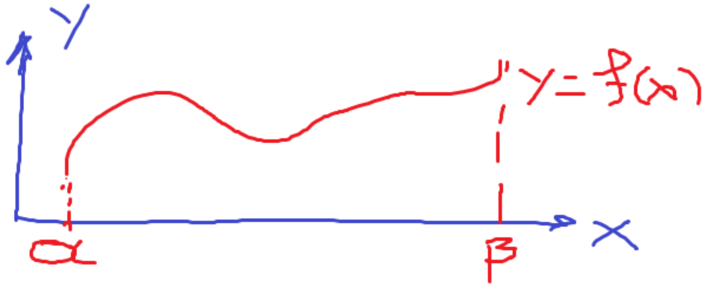
2) Γενικά οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις σε όλο το πεδίο ορισμού τους, δηλαδή σε όλο το $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $f(x)$ είναι πολυώνυμο n-στού βαθμού τότε

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (1)}$$

Ο (1) είναι ο ορισμός της συνέχειας μίας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Παρατήρηση

Όταν μία συνάρτηση είναι συνεχής η γραφική της παράσταση είναι συνεχής και δεν διακόπτεται.



Η f(x) είναι συνεχής στο (α, β)

Παράδειγμα

Η f(x) είναι ασυνεχής στο $x = x_0$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{x-3} = \dfrac{2\cdot 2-1}{2-3} = \dfrac{3}{-1} = -3$

Έστω $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$. Η g(x) έχει $D(g) = \mathbb{R} - \{3\}$. Η g(x) λέγεται ρητή συνάρτηση γιατί είναι πηλίκο πολυωνύμων.
Η g(x) είναι συνεχής στο D(g).

4) Έστω $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$, όπου $g(x), h(x)$ πολυώνυμα. ③

Η $f(x)$ λέγεται ρητή συνάρτηση. Το $D(f)=\mathbb{R}-\Sigma$, όπου Σ είναι το σύνολο των ριζών της $h(x)$. Η $f(x)$ είναι συνεχής σε όλο το $D(f)$. (Οι $g(x)$, $h(x)$ δεν έχουν κοινές ρίζες).

5) $f(x)=2x^2+1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x^2+1)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x^2+1)=+\infty$$