3)

Παρατηρήσεις

$$1x^2 - x + 1 = 0$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)3}}{2} \Rightarrow$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, το i λέγεται φανταστική μονάδα

$$\rho_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Οι ρ_1, ρ_2 λέγονται συζυγείς μιγαδικοί!

Κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές εάν έχει μιγαδικές ρίζες θα τις έχει πάντα σε ζεύγη συζυγών.

4) Ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές περιττού βαθμού έχει τουλάχιστο μία πραγματική ρίζα (Η 4 είναι άμεση συνέπεια της 3)

5) Αν ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές έχει σαν ρίζα τον αριθμό $α+\sqrt{β}$ τότε θα έχει σαν ρίζα και τον αριθμό $α-\sqrt{β}$, $α\in\mathbb{R}$, $β\geq 0$

6) Αν ο αριθμός $ρ$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ τότε το $f(x)$ διαιρείται ακριβώς με $x-ρ$.

Διαιρετότητα πολυωνύμων και ρίζες πολυωνύμων

Σύμβολο

Το 3 διαιρεί το 15: $15=3\cdot 5$ Συμβολικά γράφουμε $3|15$

Το 4 δεν διαιρεί το 15: $15=4\cdot 3+3$ Συμβολικά γράφουμε $4\nmid 15$

Τον ίδιο συμβολισμό χρησιμοποιούμε για τα πολυώνυμα

Παράδειγμα

$1x^2-5x+6$ $\quad ρ_{1,2}=2,3$ $\quad αx^2+βx+γ$ $\quad ρ_1,ρ_2$ $\quad αx^2+βx+γ=α(x-ρ_1)(x-ρ_2)$

Εδώ έχουμε $x^2-5x+6=1(x-2)(x-3)=(x-2)(x-3)$

Το παράδειγμα αυτό επαληθεύει την παρατήρηση 6:

$f(x)=x^2-5x+6$ $\quad f(2)=0$ $\quad$ Πράγματι $\begin{array}{l|l} x^2-5x+6 & x-2 \\ \cline{2-2} \upsilon=0 & x-3 \end{array}$ Γράφουμε $x-2 \mid x^2-5x+6$

Ομοίως $f(3)=0$ $\longrightarrow$ Πράγματι: $\begin{array}{l|l} x^2-5x+6 & x-3 \\ \cline{2-2} \upsilon=0 & x-2 \end{array}$ Γράφουμε $x-3 \mid x^2-5x+6$

Το $x-4$ διαιρεί ακριβώς το x^2-5x+6; ΟΧΙ

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+6 & x-4 \\ \cline{2-2} -x^2+4x & x-1 \\ \hline -x+6 & \\ +x-4 & \\ \hline 2=\upsilon & \end{array}$$

$x^2-5x+6=(x-4)(x-1)+2$

$f(4)=4^2-5\cdot 4+6=2$ (= υπόλοιπο)

Αυτό συμβαίνει γενικά! Και αυτό είναι το περιεχόμενο της επόμενης πρότασης.

Πρόταση

(4)

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το $x-\rho$ είναι $f(\rho)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το $\alpha x+\beta$ είναι $f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Απόδειξη

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχω:

$f(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$ (1) Αφού $\deg(x-\rho)=1$ και $\deg \upsilon(x)<\deg(x-\rho)$

Διαιρετέος, Διαιρέτης, Υπόλοιπο

έχω ότι $\deg \upsilon(x)=0$, δηλαδή $\upsilon(x)=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

(1) $\Rightarrow f(x)=(x-\rho)\pi(x)+\alpha$ (2) Η (2) ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα θα ισχύει και για $x=\rho$. Επομένως: $f(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\alpha \Rightarrow \boxed{f(\rho)=\alpha}$ Αλλά το α είναι το υπόλοιπο.

Παρόμοια αποδεικνύεται και το δεύτερο μέρος της πρότασης.

$f(x)=(\alpha x+\beta)p(x)+\upsilon(x)$ (3) Αφού $\deg\upsilon(x)<\deg(\alpha x+\beta)=1$ έχω ότι

Διαιρετέος Διαιρέτης Πηλίκο Υπόλοιπο

$\deg\upsilon(x)=0$ και $\upsilon(x)=\delta, \delta\in\mathbb{R}$.

Η (3) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα ισχύει και για $x=-\frac{\beta}{\alpha}$. Επομένως:

$$f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left(\cancel{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\cancel{\alpha}}\right)+\beta\right)p(x)+\delta \Rightarrow f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0\,p\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\delta}$$ Αλλά το δ είναι το υπόλοιπο. Τέλος της απόδειξης

Παρατήρηση

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με $x-\rho$ είναι $f(\rho)=0$. Δηλαδή το $x-\rho$ διαιρεί ακριβώς το $f(x)$. Συμβολικά: $x-\rho \mid f(x)$.
Συνοπτικά έχουμε: Αν $f(\rho)=0 \Longrightarrow x-\rho \mid f(x)$ Η συνεπαγωγή αυτή είναι άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης. Η συνεπαγωγή αυτή μαζί με την αντίστροφη Αν $x-\rho \mid f(x) \Longrightarrow f(\rho)=0$ αποτελούν το περιεχόμενο της επόμενης πρότασης.

Πρόταση

Το $x-\rho$ διαιρεί ακριβώς το $f(x)$ αν και μόνο αν $f(\rho)=0$.
(Με σχέση: $x-\rho \mid f(x) \Longleftrightarrow f(\rho)=0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$x-\rho \mid f(x) \Longrightarrow f(\rho)=0$$

Αφού $x-\rho \mid f(x)$ έχω $f(x)=(x-\rho)\pi(x)$ η οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα και για $x=\rho$. Επομένως $f(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0\pi(\rho)=0 \Rightarrow f(\rho)=0$

$$f(\rho)=0 \Longrightarrow x-\rho \mid f(x)$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχω

$f(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$ Αφού $\deg \upsilon(x)<\deg(x-\rho)=1 \Rightarrow \deg \upsilon(x)=0 \Rightarrow$

Διαιρετέος Διαιρέτης Πηλίκο Υπόλοιπο

$\upsilon(x)=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$. Επομένως $f(x)=(x-\rho)\pi(x)+\lambda$ Για $x=\rho$ παίρνω $f(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\lambda \Rightarrow f(\rho)=0\pi(\rho)+\lambda \Rightarrow f(\rho)=\lambda$ Αλλά από υπόθεση $f(\rho)=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow f(x)=(x-\rho)\pi(x) \Rightarrow x-\rho \mid f(x)$

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Άσκηση

Το πολυώνυμο $f(x)$ διαιρείται ακριβώς με $ax+b$ εάν και μόνο αν $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$. Δηλαδή ισχύει

$$ax+b \mid f(x) \iff f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$$