Κριτήριο του λόγου
Παραδείγματα

1. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 e^{-n^2}$

$a_n = n^4 e^{-n^2}$, $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \frac{e^{-(n^2+2n+1)}}{e^{-n^2}}$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 e^{-(2n+1)}$

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 e^{-(2n+1)}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \lim_{n\to+\infty} e^{-2n-1}$

$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{2n+1}} =$

$= (1+0)(1+0)(1+0)(1+0)\cdot 0 = 0 < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει

2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$$

2

$a_n = \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}} = \frac{(-1)^n 2^{n+1} n^2}{(-1)^{n-1} 2^n (n+1)^2}$

$$= \frac{(-1) 2 n^2}{(n+1)^2}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2 n^2}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1$$

Άρα η σειρά αποκλίνει

Δυναμοσειρές

Δυναμοσειρά ονομάζεται κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{a_n} x^n$ ή $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$. Για παράδειγμα η σειρά Taylor είναι μια δυναμοσειρά.

Σειρές

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 4 + 4\frac{1}{3} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots$$

Δυναμοσειρές

Παράδειγμα

$$\boxed{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{\frac{1}{n!}}\, x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως στη θέση του x σε μία δυναμοσειρά βάλω έναν αριθμό η δυναμοσειρά γίνεται σειρά αριθμών. 4

Πρόταση για τη σύγκλιση της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$

Κάθε δυναμοσειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ συγκλίνει σε ένα διάστημα της μορφής:

$(a-R, a+R)$ $a-R$ a $a+R$, ή, $[a-R, a+R)$ $a-R$ a $a+R$, ή,

$(a-R, a+R]$ $a-R$ a $a+R$, ή, $[a-R, a+R]$ $a-R$ a $a+R$, ή,

a $(R=0)$, ή, $-\infty$ a $+\infty$ $(R=+\infty)$

Για να βρούμε το διάστημα $(\alpha-R, \alpha+R)$ που αναφέρεται διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου. Προσοχή! Το κριτήριο του λόγου ΔΕΝ μας λέει τι γίνεται στα άκρα $\alpha-R$, $\alpha+R$. Για τα σημεία αυτά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της σειράς ή άλλο κριτήριο.

Παράδειγμα ⑥

Εξετάστε αν συγκλίνει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \boxed{\frac{1}{n^2 3^n}} x^n$$

$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \ a_n = \frac{1}{n^2 3^n}, \ x^n \to x^n$

$$b_n = \frac{1}{n^2 3^n} x^n, \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}}{\frac{x^n}{n^2 3^n}} = \frac{n^2 3^n x^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1} x^n} = \frac{n^2 \cdot x}{(n+1)^2 \cdot 3}$$

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{n^2 \cdot x}{3 \cdot (n+1)^2}\right| = \left|\frac{n^2}{3 \cdot (n+1)^2}\right| \cdot |x| = \frac{n^2}{3(n+1)^2} |x|$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2}{3(n+1)^2} |x|\right) = |x| \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{3(n+1)^2} = \frac{|x|}{3}$$

Εαν $\frac{|x|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ τότε η σειρά συγκλίνει (7)

Εαν $\frac{|x|}{3} > 1 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x > 3$ ή $x < -3$ τότε η σειρά αποκλίνει

Εαν $\frac{|x|}{3} = 1 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$ Το κριτήριο δεν αποφαίνεται. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-3, 3)$, χωρίς να ξέρουμε τι γίνεται στα άκρα $-3, 3$

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n(3n-1)}(x-1)^n$$

$$3n-1 \to 3(n+1)-1 = 3n+3-1 = 3n+2$$

$$b_n = \frac{n}{2^n(3n-1)}(x-1)^n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\dfrac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)}}{\dfrac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}} = \frac{2^n(3n-1)(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)\,n\,(x-1)^n} = \frac{(3n-1)(n+1)(x-1)}{2(3n+2)n}$$

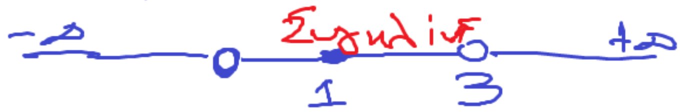
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(3n-1)(n+1)(x-1)}{2(3n+2)n}\right| = |x-1|\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n-1)(n+1)}{2(3n+2)n} =$$

$$= \frac{|x-1|}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{3n^2}\left(1-\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{3n^2}\left(1+\frac{2}{3n}\right)} = \frac{|x-1|}{2}\cdot\frac{1\cdot 1}{1} = \frac{|x-1|}{2}$$

9

Εάν $\dfrac{|x-1|}{2} < 1 \iff |x-1| < 2 \iff -2 < x-1 < 2 \iff$

$\iff -1 < x < 3$ η σειρά συγκλίνει



Εάν $\dfrac{|x-1|}{2} > 1 \iff |x-1| > 2 \iff x-1 > 2$ ή $x-1 < -2$

$\iff x > 3$ ή $x < -1$ η σειρά αποκλίνει

Τα $-1, 3$ πρέπει να τα εξετάσουμε ξεχωριστά.

Εάν $\dfrac{|x-1|}{2} = 1 \iff |x-1| = 2 \iff x-1 = \pm 2 \iff x-1 = 2$ ή $x-1 = -2 \iff x=3$ ή $x=-1$

Τότε το κριτήριο δεν αποφαίνεται.

Ακολουθίες
Βασικά όρια

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = 1,\ x>0$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ εάν $|x|<1$ $(-1<x<1)$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\ \forall x\in\mathbb{R}$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Άσκηση

$$b_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[1^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e^{-1}\cdot e^{1} = e^{0} = 1$$

Θεώρημα παρεμβολής

Αν $a_n \leq b_n \leq c_n$, $n \geq n_0$

και $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$ τότε $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$

Άσκηση

$$a_n = \frac{2\sin^4 n}{n+1}$$

$-1 \leq \sin n \leq 1$, $\sin^4 n$ παίρνει θετικές τιμές. Άρα

$0 \leq \sin^4 n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2\sin^4 n \leq 2 \Rightarrow \boxed{0 \leq \frac{2\sin^4 n}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}}$

Αφού $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$

Άρα από το Θεώρημα της παρεμβολής έχω $\lim_{n\to+\infty} \frac{2\sin^4 n}{n+1} = 0$.

Άσκηση

12

$$a_n = \sqrt[n]{n^2+2n+2}$$

$n^2+2n+2>1$, $\sqrt[n]{x}$, $x\in(0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα

Επομένως $\sqrt[n]{n^2+2n+2} > \sqrt[n]{1} = 1$ Άρα έχω:

$$\underline{1} < a_n = \sqrt[n]{n^2+2n+2} = \sqrt[n]{\left(n+\tfrac{1}{4}\right)^2+\tfrac{1}{4}} \leq \sqrt[n]{(n+n)^2+n^2} =$$

$$= \sqrt[n]{(2n)^2+n^2} = \sqrt[n]{5n^2} = \sqrt[n]{5}\,\sqrt[n]{n^2} = \underline{\sqrt[n]{5}}\,\underline{\sqrt[n]{n}}\,\underline{\sqrt[n]{n}}$$

Έχω $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{5}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}\right) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$.

Άρα $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

Πρόταση

13

Έστω ακολουθία a_n και $f(x)$ συνάρτηση ορισμένη για $x \geq n_0$ και $f(n)=a_n$. Εάν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L$.

Παράδειγμα

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2^x}$ $f(x)$ ορίζεται για $x\geq 1$ $(n_0=1)$

και $f(n)=\frac{\sqrt{n}}{2^n}=a_n$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2^x\ln 2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}\;2^x\ln 2}=0$ Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

Παράδειγμα

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f(x)$ ορίζεται για $x \geq 1$, $n_0 = 1$,

$f(n) = \frac{\ln n}{n} = a_n$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Άσκηση (Π, V) 15

Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $a_1=\sqrt{2}$ και εάν συγκλίνει βρείτε το όριο

Λύση

$a_2=\sqrt{2+a_1}=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1$, Ομοίως $a_3>a_2$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(n): a_{n+1}>a_n\ \forall n=1,2,\ldots$

Δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι η a_n είναι γνησίως αύξουσα.

Αποδεικνύω με επαγωγή: (16)

$P(1)$: $a_2 > a_1$

$a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$

(ισχύει)

$P(n)$: $a_{n+1} > a_n$ Το δέχομαι

$P(n+1)$: $a_{n+2} > a_{n+1}$

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} + 2 > a_n + 2 \Rightarrow \sqrt{a_{n+1} + 2} > \sqrt{a_n + 2} \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$. Άρα a_n γν. αύξ.

Εάν η a_n είναι φραγμένη θα συγκλίνει στο ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω ότι αυτό συμβαίνει και έστω ℓ το όριο. Τότε:

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \sqrt{2+\lim_{n\to+\infty} a_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = \sqrt{2+\ell} \Rightarrow \ell^2 = 2+\ell \Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0$$

Άρα $\ell_1 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2,$

$$\ell_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$

Απορρίπτεται γιατί $a_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Θα δείξω ότι $a_n < 2$ $\forall\, n = 1, 2, \ldots$ 18

$P(n): a_n < 2$

$P(1): a_1 = \sqrt{2} < 2$ που ισχύει

$P(n): a_n < 2$ Το δεχόμαστε

$P(n+1): a_{n+1} < 2$

$a_n < 2 \Rightarrow a_n + 2 < 2 + 2 = 4 \Rightarrow \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{4} = 2$

$\Rightarrow a_{n+1} < 2$, $\Rightarrow$ για $n = 1, 2, \ldots$ Άρα η a_n έχει σαν άνω φράγμα το 2.

19

Άρα η a_n είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη.
Άρα συγκλίνει. Συγκλίνει στο 2. Αυτό το δείξαμε πριν:

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \sqrt{2+\lim_{n\to+\infty} a_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = \sqrt{2+\ell} \Rightarrow \dots \Rightarrow \ell = 2.$$

Ονομαστικό και πραγματικό επιτόκιο

Έστω Κεφάλαιο K_0 ανατοκίζεται n φορές το χρόνο με ονομαστικό επιτόκιο r. Εάν r_0 είναι το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο δείξτε ότι ισχύει

$$r_0 = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$$

	1η	2η	. . .	n η περίοδος
K_0	$K_0\left(1+\frac{r}{n}\right)$	$K_0\left(1+\frac{r}{n}\right)\left(1+\frac{r}{n}\right)=K_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^2$	. . . .	$K_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$

Με πραγματικό επιτόκιο r_0 στο τέλος του χρόνου έχουμε $K_0(1+r_0)$. Το r_0 είναι το πραγματικό ετήσιο που αντιστοιχεί στο r εάν

$$\cancel{K_0}(1+r_0)=\cancel{K_0}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \Rightarrow r_0=\left(1+\frac{r}{n}\right)^n-1$$

Χρεωλυσία

Δανείζεται κάποιος 120.000 € ανατοκιζόμενο ετησίως με 4%. Πόσες δόσεις των 15.000 € πρέπει να πληρώσει στην αρχή κάθε έτους για να εξοφλήσει το δάνειο

$$X=\frac{K_0 r(1+r)^n}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]},\quad X=15.000,\ K_0=120.000,\ r=0.04$$

$$\cancel{15}.\cancel{000}=\frac{\cancel{120}^{8}.\cancel{000}\cdot 0.04\cdot 1.04^n}{1.04\cdot(1.04^n-1)}\Rightarrow\frac{1.04}{8\cdot 0.04}=\frac{1.04^n}{1.04^n-1}\Rightarrow$$

0.3077

$$\Rightarrow\frac{8\cdot 0.04}{1.04}=\frac{1.04^n-1}{1.04^n}=1-\frac{1}{1.04^n}\Rightarrow 1-0.308=\frac{1}{1.04^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.04^n=\frac{1}{1-0.308}=1.445\Rightarrow n=\frac{\ln(1.445)}{\ln(1.04)}=\frac{0.368}{0.039}=9.436$$