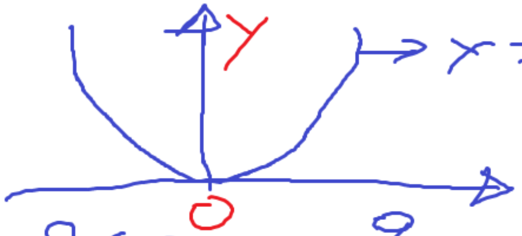
Ασκήσεις στα Ορισμένα Ολοκληρώματα

Άσκηση

1. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τα γραφήματα $y^2=4-x$, $y=-1$, $y=\frac{3}{2}$

Λύση

- $y^2=4-x$ $\quad y^2\geq 0 \Rightarrow 4-x\geq 0 \Rightarrow 4\geq x$
- $x=0 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$
- $y=0 \Rightarrow 4-x=0 \Rightarrow x=4$
- $y^2=4-x \Rightarrow x=4-y^2=f(y)$ $\quad \boxed{f(y)=f(-y)}$



$\rightarrow x = f(x) = x^2$

$f(x) = x^2 \qquad f(-x) = (-x)^2 = x^2$

$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ Η γραφ. παρ. έχει άξονα συμμετρίας τον Oy

$x = f(y) = 4 - y^2$

$f(-y) = 4 - (-y)^2 = 4 - y^2 = f(y)$

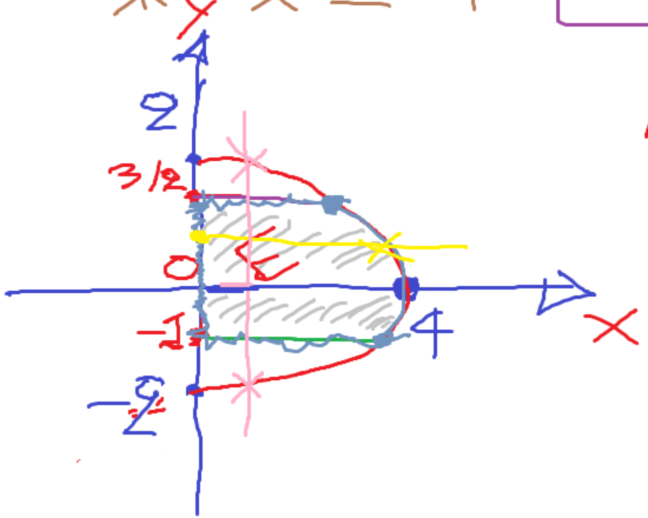
$f(y) = f(-y) \Rightarrow$ Η γραφ. παρ. έχει άξονα συμμετρίας τον Ox.

Η ζητούμενη γραφική

(3)

* Τέμνει τον Oy στα -2 και 2
* Τέμνει τον Ox στο 4
* Έχει άξονα συμμετρίας τον Ox
* $x \leq 4$

$\boxed{x=f(y)=4-y^2}$



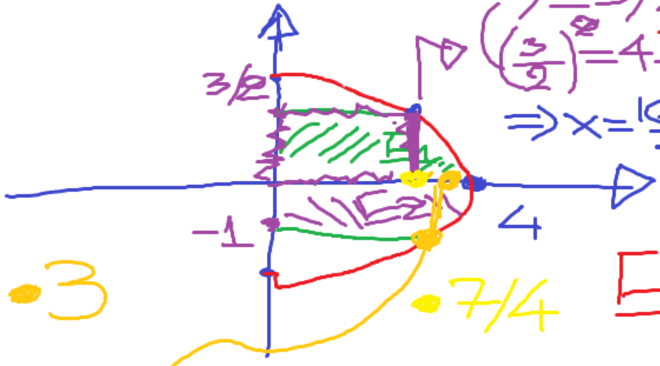
$$E = \int_{-1}^{3/2} (4-y^2)\,dy = \int_{-1}^{3/2} 4\,dy - \int_{-1}^{3/2} y^2\,dy$$

$$= 4\int_{-1}^{3/2} dy - \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3/2} = 4\left[y\right]_{-1}^{3/2} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3/2}$$

$$= 4\left(\frac{3}{2}-(-1)\right) - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{205}{24} \text{ τ.μ.}$$

Παρατήρηση

Μπορούμε το εμβαδό Ε να το υπολογίσουμε και διαφορετικά



$y = 3/2$

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 - \boxed{x} \Rightarrow x = \frac{16}{4} - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$

$y^2 = 4 - x \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x}$

$y = -1$

$(-1)^2 = 4 - x \Rightarrow \boxed{x = 3}$

$E = E_1 + E_2$

$E_1 = E_{1\alpha} + E_{1\beta}$

$E_{1\alpha} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{8}$

$E_{1\beta} = \int_{7/4}^{4} \sqrt{4-x}\, dx$

Επαναλάβετε για το E_2. Προσθέστε $E_1 + E_2$. Πρέπει να βρείτε $\frac{205}{24}$

$$E_2 = 1\boxed{}_{3}^{4} + $$ 

 $$= \left| \int_3^4 -\sqrt{4-x}\,dx \right|$$

5

2.

Άσκηση

Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη $x=y^3-5y^2+4y$ και τον άξονα των y.

Λύση

$$x=f(y)=y^3-5y^2+4y=y(y^2-5y+4)=y(y-1)(y-4)$$

y		0		1		4	
y	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$y-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$y-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$y(y-1)(y-4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lim_{y\to+\infty} f(y)=+\infty$$

$$\lim_{y\to-\infty} f(y)=-\infty$$

$$E = \int_0^1 f(y)\,dy + \left| \int_1^4 f(y)\,dy \right| \qquad x = f(y) = y^3 - 5y^2 + 4y$$

$$= \int_0^1 (y^3 - 5y^2 + 4y)\,dy + \left| \int_1^4 (y^3 - 5y^2 + 4y)\,dy \right|$$

8

$$= \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 - 5\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 + 4\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 +$$

$$\left|\left[\frac{y^4}{4}\right]_1^4 - 5\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^4 + 4\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^4\right| =$$

$$\frac{1}{4} - 5\,\frac{1}{3} + 4\,\frac{1}{2} + \left|\frac{4^4}{4} - \frac{1}{4} - 5\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1}{3}\right) +\right.$$

$$\left. +4\left(\frac{4^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\right| = \frac{71}{6}$$ τετραγωνικές μονάδες.

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

Πρώτου είδους

$f(x)$ συνεχής συνάρτηση

1) $$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\text{ορισμός}}{=\!=\!=} \lim_{k\to+\infty} \int_{\alpha}^{k} f(x)\,dx$$

2) $$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx \underset{\text{ορισμός}}{=\!=\!=} \lim_{\ell\to-\infty} \int_{\ell}^{\alpha} f(x)\,dx$$

3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\text{ορισμός}}{=} \lim_{\ell \to -\infty} \int_{\ell}^{\alpha} f(x)\,dx + \lim_{k \to +\infty} \int_{\alpha}^{k} f(x)\,dx$$

Παρατήρηση

Ο ορισμός 3 δεν εξαρτάται από την επιλογή του αριθμού α: Όποιο α και να επιλέξουμε θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα

Παραδείγματα

1. Υπολογίστε το $\int e^{2x}\,dx$ και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα

Υπολογισμός

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx \underset{\text{ορισμός}}{=\!=\!=} \lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_{\varepsilon}^{0} e^{2x}\,dx$$

$$\int_{\ell}^{0} e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\ell}^{0} = \frac{e^{0}}{2} - \frac{e^{2\ell}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{2\ell}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{\ell\to-\infty}\int_{\ell}^{0} e^{2x}\,dx = \boxed{\lim_{\ell\to-\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2\ell}}{2}\right)}$$

$$= \lim_{\ell\to-\infty}\frac{1}{2} - \lim_{\ell\to-\infty}\frac{e^{2\ell}}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

2. # Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ για τις διάφορες τιμές του p, $p \neq 1$

Υπολογισμός

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^{k} \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$\int_1^k \frac{1}{x^p}\,dx, \quad p \neq 1$$

$$\int_1^k \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^k x^{-p}\,dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^k =$$

$$= \frac{k^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{1-p}\left(k^{1-p} - 1\right)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}\left(k^{1-p}-1\right)\right) = \frac{1}{1-p}\lim_{k\to+\infty}\left(k^{1-p}-1\right)$$

Επομένως $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}\lim_{k\to+\infty}\left(k^{1-p}-1\right)$

Χρησιμοποιώ $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} k^{1-p} = \begin{cases} +\infty & 1-p>0 \\ 0 & 1-p<0 \end{cases}$

Τελικά $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & p<1 \\ \dfrac{1}{p-1} & p>1 \end{cases}$