Ολοκληρώματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $I=\int\sqrt{x^2-2x^4}\,dx$, $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Υπολογισμός

$$I=\int\sqrt{x^2(1-2x^2)}\,dx=\int\sqrt{x^2}\,\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int|x|\sqrt{1-2x^2}\,dx$$

Επειδή $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $|x|=x$. Επιπλέον, $1-2x^2=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$1-2x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Επομένως $1-2x^2>0$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και επομένως και στο $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2

$I = \int x\sqrt{1-2x^2}\,dx,\ x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Θέτω $\boxed{\omega = 1-2x^2} \Rightarrow d\omega = d(1-2x^2) = (1-2x^2)'dx$

$\Rightarrow d\omega = -4x\,dx \Rightarrow \boxed{x\,dx = -\frac{1}{4}d\omega}$

$I = \int \sqrt{\omega}\left(-\frac{1}{4}d\omega\right) = -\frac{1}{4}\int\sqrt{\omega}\,d\omega = -\frac{1}{4}\int \omega^{1/2}\,d\omega$

$= -\frac{1}{4}\left(\frac{\omega^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2\omega^{\frac{3}{2}}}{3} + c\right) =$

$= -\frac{1}{6}\omega^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}c = -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + c_1 = -\frac{1}{6}\sqrt{(1-2x^2)^3} + c_1,\ c_1 = -\frac{1}{4}c$

Ολοκληρώματα με τη μέθοδο της αντικατάστα- (3)
σης που οδηγούν στο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{τοξεφ}\,x + c$

Παράδειγμα

1

Υπολογίστε το $I = \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

Υπολογισμός

$$I = \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

Θέτω $\boxed{\omega = \frac{x}{2}} \Rightarrow d\omega = d\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow d\omega = \left(\frac{x}{2}\right)' dx \Rightarrow d\omega = \frac{1}{2}dx$

$\Rightarrow \boxed{dx = 2\,d\omega}$

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{2d\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{4}2\int\frac{1}{1+\omega^2}d\omega=\frac{1}{2}\left(\text{τοξεφ}\,\omega+c\right)$$ 4

$$=\frac{1}{2}\text{τοξεφ}\,\omega+\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}\text{τοξεφ}\frac{x}{2}+C_1,\ C_1=\frac{1}{2}c,\ c\in\mathbb{R}$$

$C_1\in\mathbb{R}$

Παράδειγμα

2. Υπολογίστε το $I=\int\frac{1}{x^2+a^2}dx$

Υπολογισμός

$$I=\int\frac{1}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$ Θέτω $\omega=\frac{x}{a}$

$$\boxed{\omega = \frac{x}{a}} \Rightarrow d\omega = d\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{x}{a}\right)' dx \Rightarrow d\omega = \frac{1}{a}\,dx \Rightarrow$$ 5

$$\Rightarrow \boxed{dx = a\,d\omega}.$$

Αν/στώ και έχω:

$$I = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,d\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{a^{\cancel{2}}}\cancel{a}\int \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\text{Τοξεφ}\,\omega + c\right) = \frac{1}{a}\,\text{Τοξεφ}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{a}c = \frac{1}{a}\,\text{Τοξεφ}\left(\frac{x}{a}\right) + c_1$$

$c_1 = \frac{1}{a}c,\ c \in \mathbb{R},\ c_1 \in \mathbb{R}$

3 Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx$

Υπολογισμός

Μεθοδολογία

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int \frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\,dx$ υπολογίζω τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.

Αν $\Delta<0$ γράφω το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ως άθροισμα τετραγώνων. Οι περιπτώσεις

Δ=0 και Δ>0 θα εξεταστούν σε επόμενο μάθημα. Αφού το γράφω σαν άθροισμα τετραγώνων με κατάλληλη αντικατάσταση το μετατρέπω σε ολοκλήρωμα και της μορφής $\int \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega$. Εδώ έχω: $x^2+6x+13$, $\Delta=6^2-4\cdot 13=36-52=-16<0$. Έχω:

$$1\cdot x^2+6x+13 = x^2+2\cdot 3x+3^2-3^2+13=(x+3)^2-9+13=$$

$$=(x+3)^2+4=(x+3)^2+2^2$$

8

$$I=\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx=\int \frac{1}{(x+3)^2+2^2}\,dx=$$

$$=\int \frac{1}{2^2\left(\frac{(x+3)^2}{2^2}+1\right)}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}\,dx$$

Θέτω $\boxed{\omega=\frac{x+3}{2}} \Rightarrow d\omega=d\left(\frac{x+3}{2}\right) \Rightarrow d\omega=\left(\frac{x+3}{2}\right)'dx$

$$\Rightarrow d\omega=\frac{1}{2}\,dx \Rightarrow \boxed{dx=2\,d\omega}$$

9

Αντικαθιστώ και έχω:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{2}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{2}{4}\int \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{τοξεφ}\,\omega + c\right) = \frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\,\frac{x+3}{2} + \frac{1}{2}c =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{τοξεφ}\,\frac{x+3}{2} + c_1,\ c_1 = \frac{1}{2}c,\ c \in \mathbb{R},\ c_1 \in \mathbb{R}.$$

4. Παράδειγμα

Υπολογίστε το $I = \int \frac{1}{3x^2+4x+11}\,dx$

Υπολογισμός

$$\Delta = 4^2 - 4\cdot 3\cdot 11 = 16 - 12\cdot 11 = 16 - 132 = -116 < 0$$

Επομένως γράφω το $3x^2+4x+11$ ως άθροισμα τετραγώνων.

$$3x^2+4x+11 = 3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}\right) = 3\left(\underbrace{x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{3}\right)$$

$$= 3\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{11}{3}\right) = 3\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{29}{9}\right) = 3\left(\left(\frac{3x+2}{3}\right)^2+\frac{29}{9}\right)$$

$$= 3\left(\frac{(3x+2)^2}{9}+\frac{29}{9}\right) = \frac{3}{9}\left((3x+2)^2+\left(\sqrt{29}\right)^2\right) = \frac{29}{3}\left(\left(\frac{3x+2}{\sqrt{29}}\right)^2+1\right)$$

11

$$I=\int\frac{1}{3x^2+4x+11}\,dx=\int\frac{1}{\frac{29}{3}\left(1+\left(\frac{3x+2}{\sqrt{29}}\right)^2\right)}\,dx$$

$$=\frac{3}{29}\int\frac{1}{1+\left(\frac{3x+2}{\sqrt{29}}\right)^2}\,dx$$

Θέτω $\boxed{\omega=\frac{3x+2}{\sqrt{29}}}\Rightarrow d\omega=d\left(\frac{3x+2}{\sqrt{29}}\right)=\left(\frac{3x+2}{\sqrt{29}}\right)'dx$

$$\Rightarrow d\omega=\frac{3}{\sqrt{29}}\,dx\Rightarrow\boxed{dx=\frac{\sqrt{29}}{3}\,d\omega}$$

12

Αντικαθιστώ και έχω:

$$I = \frac{3}{29}\int \frac{\frac{\sqrt{29}}{3}}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{\cancel{3}}{29}\,\frac{\sqrt{29}}{\cancel{3}}\int \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}\left(\text{τοξεφ}\,\omega + c\right) = \frac{1}{\sqrt{29}}\,\text{τοξεφ}\,\frac{3x+2}{\sqrt{29}} + \frac{1}{\sqrt{29}}\,c$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{29}}\,\text{τοξεφ}\,\frac{3x+2}{\sqrt{29}} + C,\quad C = \frac{1}{\sqrt{29}}\,c,\ c \in \mathbb{R},$$

$C \in \mathbb{R}$.