# Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με τη μέθοδο της αντικατάστασης

1

## Παράδειγμα

4. Υπολογίστε το $\int (1-2x)^{100}\,dx$

## Υπολογισμός

### Σύνδεση με Μεθοδολογία

$f(x)=x^{100}$ $\quad g(x)=1-2x$ $\quad f(g(x))=(1-2x)^{100}$ $\quad g'(x)=-2$

Θέτω $\omega=1-2x \Rightarrow d\omega=d(1-2x) \Rightarrow d\omega=(1-2x)'dx \Rightarrow$

$\Rightarrow d\omega=-2\,dx \Rightarrow dx=-\frac{d\omega}{2}=-\frac{1}{2}\,d\omega$

Αντικαθιστούμε και έχουμε: (2)

$$\int (1-2x)^{100}\,dx = \int \omega^{100}\left(-\frac{1}{2}\right)d\omega = -\frac{1}{2}\int \omega^{100}\,d\omega$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^{100+1}}{100+1}+c\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{\omega^{101}}{101} - \frac{1}{2}c =$$

$$= -\frac{1}{202}(1-2x)^{101} + C_1,\quad C_1 = -\frac{1}{2}c,\ c\in\mathbb{R},\ C_1\in\mathbb{R}$$

Παράδειγμα

5. Υπολογίστε το $\int e^{x^3+2}\,\cancel{x}^2\,dx$

Υπολογισμός

## Σύνδεση με τη Μεθοδολογία 3

$f(x)=e^x \quad g(x)=x^3+2 \quad f(g(x))=e^{x^3+2} \quad g'(x)=3x^2$

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int e^{x^3+2}\,3x^2dx$$

Υπολογισμός

Θέτω $\omega=g(x)=x^3+2 \Rightarrow d\omega=d(x^3+2)=(x^3+2)'dx$

$\Rightarrow d\omega=3x^2dx \Rightarrow x^2dx=\frac{1}{3}d\omega$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\int e^{x^3+2}x^2dx=\int e^{\omega}\frac{1}{3}d\omega=\frac{1}{3}\int e^{\omega}d\omega=\frac{1}{3}(e^{\omega}+c)$$

$$=\frac{1}{3}(e^{x^3+2}+c)=\frac{1}{3}e^{x^3+2}+\frac{1}{3}c=\frac{1}{3}e^{x^3+2}+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$$

όπου $c_1 = \frac{1}{3}c$, $c \in \mathbb{R}$. 4

Λίγο διαφορετικά!

$$\int e^{x^3+2} x^2 dx = \int e^{x^3+2} \frac{1}{3} 3x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int e^{x^3+2} 3x^2 dx$$

$$\omega = g(x) = x^3+2 \Rightarrow d\omega = (x^3+2)' dx \Rightarrow d\omega = 3x^2 dx$$

Αντικαθιστώ και έχω

$$\int e^{x^3+2} x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+2} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int e^{\omega} d\omega = \dots = \frac{1}{3} e^{x^3+2} + c$$

6.

Παραδείγματα

Υπολογίστε το $\int 3^x\,dx$

Υπολογισμός

Α τρόπος

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$, $a>0, a\neq 1$, $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c, c\in\mathbb{R}$

Β τρόπος

$$(3^x)' = (e^{\ln 3^x})' = (e^{x\ln 3})' = e^{x\ln 3}\cdot(x\ln 3)' = 3^x \ln 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3^x)' = 3^x \ln 3 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)' = 3^x}$$

6

Δηλαδή, $\int 3^x\,dx = \int \left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)' dx$

Χρησιμοποιώ τη βασική ιδιότητα

$$\boxed{\int F'(x) = F(x) + c}$$

Επομένως $\int 3^x\,dx = \int \left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)' dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$

Γ τρόπος

$$\int 3^x\,dx$$

$$\omega = 3^x \Rightarrow d\omega = d3^x \Rightarrow d\omega = (3^x)'dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\omega = 3^x \ln 3\, dx \Rightarrow \boxed{3^x\,dx = \frac{1}{\ln 3}d\omega}$$

Αντικαθιστώ και έχω

$$\int 3^x dx = \int \frac{1}{\ln 3} d\omega = \frac{1}{\ln 3}\int d\omega = \frac{1}{\ln 3}\int 1\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\ln 3}(\omega + c) = \frac{1}{\ln 3}(3^x + c) = \frac{1}{\ln 3}3^x + \frac{1}{\ln 3}c = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$, c_1 = \frac{c}{\ln 3}, c \in \mathbb{R}.$



Δ Τρόπος

$$\int 3^x\,dx$$

Σύνδεση με Μεθοδολογία

$3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x\ln 3}$, $f(x)=e^x$, $g(x)=x\ln 3$, $g'(x)=\ln 3$

$$\int 3^x\,dx = \int e^{x\ln 3}\frac{1}{\ln 3}\ln 3\,dx = \frac{1}{\ln 3}\int e^{x\ln 3}\ln 3\,dx$$

$\omega = x\ln 3 \Rightarrow d\omega = d(x\ln 3) = (x\ln 3)'dx = \ln 3\,dx$

Αντικαθιστώ: $\int 3^x\,dx = \frac{1}{\ln 3}\int e^{\omega}d\omega = \frac{1}{\ln 3}(e^{\omega}+c) = \frac{1}{\ln 3}(e^{x\ln 3}+c) =$

$$= \frac{1}{\ln 3}\left(3^x + c\right) = \frac{1}{\ln 3}3^x + \frac{1}{\ln 3}c = \frac{1}{\ln 3}3^x + c_1, \quad 9$$

$$c_1 = \frac{1}{\ln 3}c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα

7

Υπολογίστε το $\int \varepsilon\varphi x \, dx$

Υπολογισμός

Α τρόπος (Σύνδεση με Μεθοδολογία)

$$\int \varepsilon\varphi x\,dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad f(g(x)) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad g'(x) = -\eta\mu x$$

$$\int \varepsilon\varphi x\,dx = (-1)\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot \eta\varphi x \cdot (-1)\,dx$$

Θέτω $\omega = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow d\omega = d(\sigma\upsilon\nu x) = (\sigma\upsilon\nu x)'dx$

$\Rightarrow \boxed{d\omega = -\eta\mu x\,dx}$. Αντικαθιστώ και έχω

$$\int \varepsilon\varphi x\,dx = -\int \frac{1}{\omega}\,d\omega = -(\ln|\omega| + c) = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| - c =$$

$$= -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c_1, \quad c_1 = -c, \; c \in \mathbb{R}, \; c_1 \in \mathbb{R}$$

## Β τρόπος

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c}$$

$$\int \varepsilon\varphi x\,dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

$$= -\left(\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c\right) = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| - c$$

$$= -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c_1,\quad c_1 = -c,\ c \in \mathbb{R},\ c_1 \in \mathbb{R}$$

8.



Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}\,dx$

Υπολογισμός

Α τρόπος

Βασικό ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}\,dx = \varepsilon\varphi x + c$

Β τρόπος

$$\int \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}\,dx = \int (\varepsilon\varphi x)'\,dx = \varepsilon\varphi x + c$$

Γενικά: $\boxed{\int F'(x)\,dx = F(x) + c}$

ΔΥΟ ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ

$$\boxed{\begin{gathered}\int F'(x)\,dx = F(x) + c \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c\end{gathered}}$$

Γ τρόπος

$$\int \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}\,dx$$

$$\omega = \varepsilon\varphi x \Rightarrow d\omega = d(\varepsilon\varphi x) = (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$$

Αντικαθιστώ και έχω:

$$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int d\omega = \omega + C = \varepsilon\varphi x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

14

9

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^4 x}dx$

Υπολογισμός

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^4 x}dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x}\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^4 x}\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\eta\mu^4 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int \frac{1}{\eta\mu^4 x}\sigma\upsilon\nu x\,dx - \int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

$$= \int \frac{1}{ημ^4 x} συν x\,dx - \int \frac{1}{ημ^2 x} συν x\,dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{ημ^4 x} \underline{συν x}\,dx, \quad I_2 = \int \frac{1}{ημ^2 x} συν x\,dx$$

$\underline{I_1}$

$$f(x) = \frac{1}{x^4}, \; g(x) = ημx, \; f(g(x)) = \frac{1}{ημ^4 x}, \; g'(x) = (ημx)' = συνx$$

$$\boxed{ω = g(x) = ημx} \Rightarrow dω = d(ημx) \Rightarrow \boxed{dω = συνx\,dx}$$

$$\underline{I_1} = \int \frac{1}{ω^4} dω = \int ω^{-4} dω = \frac{ω^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{ω^{-3}}{-3} + c = \frac{(ημx)^{-3}}{-3} + c$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{1}{(ημx)^3} + c$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\quad g(x) = \eta\mu x,\quad f(g(x)) = \frac{1}{(\eta\mu x)^2},\quad g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\boxed{\omega = g(x) = \eta\mu x} \Rightarrow d\omega = d(\eta\mu x) = (\eta\mu x)'\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{d\omega = \sigma\upsilon\nu x\,dx}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\omega^2}\,d\omega = \int \omega^{-2}\,d\omega = \frac{\omega^{-2+1}}{-2+1} + c_1 = -\frac{1}{\omega} + c_1$$

$$I_2 = -\frac{1}{\eta\mu x} + c_1,$$ Επομένως

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^4 x}\,dx = I_1 - I_2 = -\frac{1}{3}(\eta\mu\, x)^{-3} - \left(-(\eta\mu\, x)^{-1} + C_1\right)$$

$$+ C = -\frac{1}{3}(\eta\mu\, x)^{-3} + (\eta\mu\, x)^{-1} + C - C_1$$

$$= -\frac{1}{3}(\eta\mu\, x)^{-3} + (\eta\mu\, x)^{-1} + C',$$

$$C' = C - C_1,\ C \in \mathbb{R},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C' \in \mathbb{R}.$$