Παραγώγιση συναρτήσεων σε πεπλεγμένη μορφή

Παρατήρηση 1

Κάθε συνάρτηση σε λυμένη μορφή μπορεί να γραφεί σε πεπλεγμένη μορφή. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Όσα έχουμε πει για την παραγώγιση συναρτήσεων σε πεπλεγμένη μορφή ισχύουν και για την παραγώγιση συναρτήσεων σε λυμένη μορφή

Παράδειγμα

②

$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2$

Έστω η ιδιασυνάρτηση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή

$y - x^2 + 2x = 0$

Α τρόπος

$y - x^2 + 2x = 0 \Rightarrow y' - 2x + 2 = 0 \Rightarrow y' = 2x - 2$

Β τρόπος

$F(x,y) = y - x^2 + 2x$

$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, $\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 1$

Επομένως $\frac{dy}{dx} = - \frac{-2x+2}{1} = 2x - 2$

Παράδειγμα (3)

Να βρεθεί η $\frac{d^2y}{dx^2}$ της συνάρτησης $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k, k\in\mathbb{R}$

Σύμβολο: $\frac{d^2y}{dx^2} \equiv y''$

Λύση

Πρώτα βρίσκουμε την $\frac{dy}{dx} \leftarrow$

Α τρόπος

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k \Rightarrow \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+\frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}y'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}y'=0 \Rightarrow y' = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{\frac{1}{x^{1/3}}}{\frac{1}{y^{1/3}}} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$$\left(y^{2/3}\right)' = \left(y^{2/3}(x)\right)' = \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}(x)\cdot y'(x)$$

Β τρόπος

④

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - k = 0$, $F(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - k$

$\boxed{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{2}{3} y^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$, Επομένως:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cancel{\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{3}}}{\cancel{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{2x+2y}{y}=\frac{2(x+y)}{y}=2\cdot\frac{x+y}{y}=\frac{2}{1}\cdot\frac{x+y}{y}$$

Υπολογισμός της $y''\left(=\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ⑤

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

$$x^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}+\left(-\frac{1}{3}\right)y^{-\frac{1}{3}-1}\cdot y'\cdot y'$$

$$+y^{-\frac{1}{3}}\cdot y''=0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}(y')^2+y^{-\frac{1}{3}}y''=0$$

$$\Rightarrow y''=\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}(y')^2}{y^{-\frac{1}{3}}} \Rightarrow y''=\frac{1}{3}\,\frac{x^{-\frac{4}{3}}+y^{-\frac{4}{3}}\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}}{y^{-\frac{1}{3}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{1}{3}\,\frac{x^{-\frac{4}{3}} + y^{-\frac{2}{3}}\,x^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $x^{2y}+3y^{x}=y$

Να βρεθεί η y'.

Λύση

Α τρόπος

$x^{2y}+3y^{x}=y \Rightarrow (x^{2y})'+3(y^{x})'=y'$, ο ' δηλώνει παραγώγιση ως προς x.

$$(x^{2y})' = \left(e^{\ln x^{2y}}\right)' = \left(e^{2y\ln x}\right)' = e^{2y\ln x}(2y\ln x)' = x^{2y}\left(2y'\ln x + 2y\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$(y^x)' = \left(e^{\ln y^x}\right)' = \left(e^{x\ln y}\right)' = e^{x\ln y}(x\cdot\ln y)' = y^x\left(x'\ln y + x(\ln y)'\right)$$ 7

$$\Rightarrow (y^x)' = y^x\left(\ln y + x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'\right).$$

Αντιστοιχώ και έχω:

$$(x^{2y})' + 3(y^x)' = y' \Rightarrow x^{2y}\left(2y'\ln x + \frac{2y}{x}\right) + 3y^x\left(\ln y + \frac{xy'}{y}\right)$$

$$= y' \Rightarrow y'\left(2x^{2y}\ln x + 3xy^{x-1} - 1\right) = -2yx^{2y-1} - 3y^x\ln y$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -\frac{2yx^{2y-1} + 3y^x\ln y}{2x^{2y}\ln x + 3xy^{x-1} - 1}}$$

B τρόπος

$$x^{2y}+3y^{x}=y \Leftrightarrow x^{2y}+3y^{x}-y=0,\quad F(x,y)=x^{2y}+3y^{x}-y$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}},\quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial x}=2y\,x^{2y-1}+3y^{x}\ln y}$$

$$\left(\partial_x(y^{x})=\partial_x\left(e^{\ln y^{x}}\right)=\partial_x\left(e^{x\ln y}\right)=e^{x\ln y}\,\partial_x(x\ln y)=\right.$$

$$\left.=y^{x}\ln y\right)$$

$$\partial_y(x^{2y})=\partial_y\left(e^{\ln x^{2y}}\right)=\partial_y\left(e^{2y\ln x}\right)=e^{2y\ln x}\,\partial_y(2y\ln x)=x^{2y}\,2\ln x$$

$$\partial_y(y^{x})=xy^{x-1},\quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial y}=2x^{2y}\ln x+3xy^{x-1}-1}$$

Επομένως $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2y\,x^{2y-1} + 3y^{x}\ln y}{2x^{2y}\ln x + 3xy^{x-1} - 1}$ (9)

ΠΡΟΣΕΞΕΤΕ ΤΙΣ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Άσκηση

Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης $x^2+xy+y=0$ στο σημείο (x_1, y_1).

Λύση

$$x^2+xy+y=0 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε από τη Θεωρία ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από: 10

$$y - y_1 = \boxed{y'(x_1)}(x - x_1) \quad (2)$$ όπου

$y'(x_1)$ είναι η παράγωγος της (1) στο x_1.

$$x^2 + xy + y = 0 \Rightarrow 2x + \underline{x}'y + xy' + y' = 0 \Rightarrow$$

$$2x + y + xy' + y' = 0 \Rightarrow y'(x+1) = -2x - y \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{2x+y}{x+1}}$$

Επομένως $\boxed{y'(x_1) = -\frac{2x_1 + y_1}{x_1 + 1}}$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow y - y_1 = -\dfrac{2x_1 + y_1}{x_1 + 1}(x - x_1) \Rightarrow$ 11

$\Rightarrow (y - y_1)(x_1 + 1) = -(2x_1 + y_1)(x - x_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(y - y_1)(x_1 + 1) + (2x_1 + y_1)(x - x_1) = 0}$$

Αυτή είναι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας.