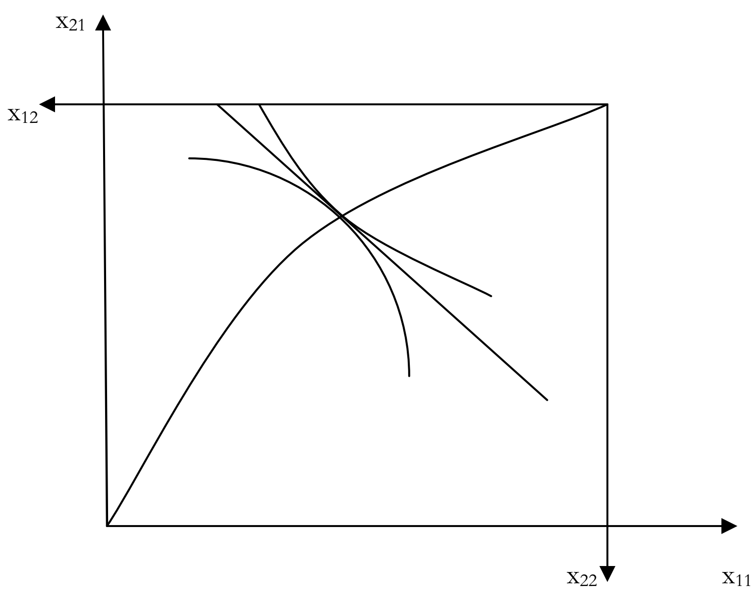
Θέμα 1ο. (α) Μια κατανομή στο εσωτερικό του κουτιού Edgeworth είναι άριστη κατά Pareto αν $MRS_1 = MRS_2$. Έχουμε τα ακόλουθα

$$MRS_1 = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_{21}}} = \frac{\frac{1}{4}x_{11}^{-\frac{3}{4}}x_{21}^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}x_{11}^{\frac{1}{4}}x_{21}^{-\frac{1}{4}}} = \frac{x_{21}}{3x_{11}},\ MRS_2 = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_{12}}}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{22}}} = \frac{\frac{2}{3}x_{12}^{-\frac{1}{3}}x_{22}^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_{12}^{\frac{2}{3}}x_{22}^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2x_{22}}{x_{12}}.$$ Στην αρχική κατανομή βρίσκουμε

$MRS_1(50,200) = \frac{200}{50} = 4 \neq MRS_2(100,0) = 0.$ Άρα η αρχική κατανομή δεν είναι άριστη κατά Pareto. Ο γεωμετρικός τόπος όλων των κατά Pareto άριστων κατανομών είναι η καμπύλη αποτελεσματικών συμφωνιών (ΚΑΣ). Άρα η επάνω στην ΚΑΣ ικανοποιείται η συνθήκη

$$MRS_1 = MRS_2 \Rightarrow \frac{x_{21}}{3x_{11}} = \frac{2x_{22}}{x_{12}} \underset{\substack{x_{12}=150-x_{11} \\ x_{22}=200-x_{21}}}{\Rightarrow} \frac{x_{21}}{3x_{11}} = \frac{2(200-x_{21})}{150-x_{11}} \Leftrightarrow x_{21} = \frac{1200x_{11}}{5x_{11}+150}$$ (καμπύλη αποτελεσματικών συμφωνιών/ΚΑΣ).



(β) Η κλίση της εισοδηματικού περιορισμού ο οποίος **διέρχεται πάντοτε από την αρχική κατανομή και από την κατανομή γενικής ισορροπίας**, έστω (x_{11}^W, x_{21}^W), είναι $\frac{x_{21}^W - 200}{x_{11}^W - 50}$ και ισούται επιπλέον με τους οριακούς λόγους υποκατάστασης των καταναλωτών 1 και 2. Άρα λύνουμε ως προς x_{21}^W την εξίσωση $\dfrac{x_{21}^W - 200}{x_{11}^W - 50} = -\dfrac{x_{21}^W}{3x_{11}^W}$

και βρίσκουμε $x_{21}^W = \dfrac{600x_{11}^W}{2x_{11}^W + 50}$ (βάλαμε το μείον στον οριακό λόγο υποκατάστασης επειδή η κλίση του εισοδηματικού περιορισμού είναι αρνητική αλλά πριν είχαμε εκφράσει τον MRS σε απόλυτη τιμή). Αλλά έχουμε $x_{21}^W = \dfrac{1200x_{11}^W}{5x_{11}^W + 150}$ (από ΚΑΣ). Λύνουμε ως προς x_{11}^W την εξίσωση $\dfrac{600x_{11}^W}{4x_{11}^W - 50} = \dfrac{1200x_{11}^W}{5x_{11}^W + 150}$ και βρίσκουμε

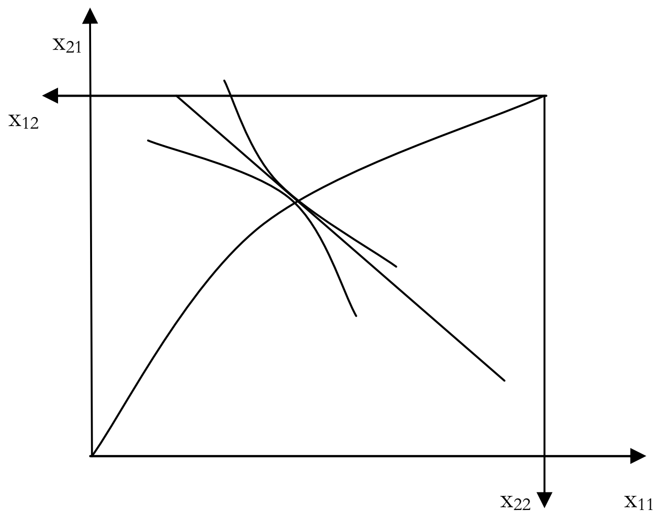
$x_{11}^W = \dfrac{250}{3} \Rightarrow x_{21}^W = \dfrac{3000}{17}$. Άρα ο ζητούμενος λόγος ανταλλαγής είναι ίσος με $\lambda = \dfrac{\frac{3000}{17} - 200}{\frac{250}{3} - 50} = \dots$.

Θέμα 2ο. Μια κατανομή στο εσωτερικό του κουτιού Edgeworth είναι άριστη κατά Pareto αν $MRS_1 = MRS_2$. Έχουμε τα ακόλουθα

$MRS_1 = \dfrac{\frac{\partial u_1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_{21}}} = \dfrac{\frac{1}{2} x_{11}^{-\frac{1}{2}} x_{21}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} x_{11}^{\frac{1}{2}} x_{21}^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{x_{21}}{x_{11}}$ και $MRS_2 = \dfrac{\frac{\partial u_2}{\partial x_{12}}}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{22}}} = \dfrac{\frac{2}{3} x_{12}^{-\frac{1}{3}} x_{22}^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} x_{12}^{\frac{2}{3}} x_{22}^{-\frac{2}{3}}} = \dfrac{2x_{22}}{x_{12}}$. Στην αρχική κατανομή βρίσκουμε

$MRS_1(50,300) = 6 \neq MRS_1(150,0) = 0.$ $MRS_1(50,200) = \dfrac{200}{50} = 4 \neq MRS_2(100,0) = 0.$ Άρα αυτή δεν είναι αποτελεσματική κατά Pareto. Ο γεωμετρικός τόπος όλων των κατά Pareto άριστων κατανομών είναι η καμπύλη αποτελεσματικών συμφωνιών τα σημεία της οποίας ικανοποιούν τη συνθήκη

$$MRS_1 = MRS_2 \Rightarrow \frac{x_{21}}{x_{11}} = \frac{2x_{22}}{x_{12}} \underset{\substack{x_{12}=200-x_{11} \\ x_{22}=300-x_{21}}}{\Rightarrow} \frac{x_{21}}{x_{11}} = \frac{2(300 - x_{21})}{200 - x_{11}} \Leftrightarrow x_{21} = \frac{600x_{11}}{x_{11} + 200} \text{ (ΚΑΣ).}$$



(β) Η κλίση της εισοδηματικού περιορισμού ο οποίος **διέρχεται πάντοτε από την αρχική κατανομή και την κατανομή γενικής ισορροπίας**, έστω (x_{11}^{W}, x_{21}^{W}), είναι $\dfrac{x_{21}^{W}-300}{x_{11}^{W}-50}$ και ισούται επιπλέον με τους οριακούς λόγους υποκατάστασης των καταναλωτών 1 και 2. Άρα λύνουμε ως προς x_{21}^{W} την εξίσωση $\dfrac{x_{21}^{W}-300}{x_{11}^{W}-50}=-\dfrac{x_{21}^{W}}{x_{11}^{W}}$ (βάζουμε το μείον επειδή η κλίση του εισοδηματικού περιορισμού είναι αρνητική αλλά πριν είχαμε εκφράσει τον MRS σε απόλυτη τιμή) και βρίσκουμε $x_{21}^{W}=\dfrac{300x_{11}^{W}}{2x_{11}^{W}-50}$. Αλλά έχουμε $x_{21}^{W}=\dfrac{600x_{11}^{W}}{x_{11}^{W}+200}$ (από ΚΑΣ). Λύνουμε ως προς x_{11}^{W} την εξίσωση $\dfrac{300x_{11}^{W}}{2x_{11}^{W}-50}=\dfrac{600x_{11}^{W}}{x_{11}^{W}+200}$ και βρίσκουμε $x_{11}^{W}=100 \Rightarrow x_{21}^{W}=\dfrac{60000}{300}=200$. Άρα ο ζητούμενος λόγος ανταλλαγής είναι ίσος με $\lambda=\dfrac{200-300}{100-50}=-2$.

Θέμα 3ο. η-τάξη, Φάκελος "Διαλέξεις 2016", αρχείο .pdf με τίτλο "Γενική ισορροπία-Άσκηση."

Θέμα 4ο. η-τάξη, Φάκελος "Διαλέξεις 2016", αρχείο .pdf με τίτλο "Θεμελιώδη θεωρήματα."

Θέμα 5ο. Ο καταναλωτής 1 λύνει το πρόβλημα δεσμευμένης μεγιστοποίησης

$$\max_{x_{11},x_{21}}.u_1(x_{11},x_{21})=x_{11}^{a}x_{21}^{1-a}$$

$$s.t. P_1 x_{11} + P_2 x_{21} = P_1 \omega_{11} + P_2 \omega_{21}$$

Σχηματίζει τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x_{11}, x_{21}, \lambda) = x_{11}^{a} x_{21}^{1-a} - \lambda(P_1 x_{11} + P_2 x_{21} - P_1 \omega_{11} - P_2 \omega_{21})$$

και βρίσκει τις

Συνθήκες α' τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x_{11}} = a x_{11}^{a-1} x_{21}^{1-a} - \lambda P_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{21}} = (1-a) x_{11}^{a} x_{21}^{-a} - \lambda P_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_1 \omega_{11} + P_2 \omega_{21} - P_1 x_{11} - P_2 x_{21} = 0 .$$

απ' όπου βρίσκουμε $x_{11} = \dfrac{a(P_1 \omega_{11} + P_2 \omega_{21})}{P_1}, x_{21} = \dfrac{(1-a)(P_1 \omega_{11} + P_2 \omega_{21})}{P_2}$ (συναρτήσεις ζήτησης x_{11}, x_{21}).

Ο καταναλωτής 2 λύνει το πρόβλημα δεσμευμένης μεγιστοποίησης

$$\max_{x_{12}, x_{22}} . u_2(x_{12}, x_{22}) = x_{12}^{\beta} x_{22}^{1-\beta}$$

$$s.t. P_1 x_{12} + P_2 x_{22} = P_1 \omega_{12} + P_2 \omega_{22} .$$

Σχηματίζει τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x_{12}, x_{22}, \lambda) = x_{12}^{\beta} x_{22}^{1-\beta} - \lambda(P_1 x_{12} + P_2 x_{22} - P_1 \omega_{12} - P_2 \omega_{22})$$

και βρίσκει τις

Συνθήκες α' τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x_{12}} = \beta x_{12}^{\beta-1} x_{22}^{1-\beta} - \lambda P_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{22}} = (1-\beta) x_{12}^{\beta} x_{22}^{-\beta} - \lambda P_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_1\omega_{12} + P_2\omega_{22} - P_1 x_{12} - P_2 x_{22} = 0 \,.$$

απ' όπου παίρνουμε $x_{12} = \frac{\beta(P_1\omega_{12} + P_2\omega_{22})}{P_1}, x_{22} = \frac{(1-\beta)(P_1\omega_{12} + P_2\omega_{22})}{P_2}$ (συναρτήσεις ζήτησης x_{12}, x_{22}).

(β) Στη γενική ισορροπία ισχύει εξ ορισμού ζήτηση = προσφορά, δηλαδή

$$x_{11} + x_{12} = \omega_{11} + \omega_{12}$$

$$x_{21} + x_{22} = \omega_{21} + \omega_{22} \,.$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση (ή τη δεύτερη αν θέλουμε) βρίσκουμε

$$\frac{a(P_1\omega_{11} + P_2\omega_{21})}{P_1} + \frac{\beta(P_1\omega_{12} + P_2\omega_{22})}{P_1} = \omega_{12} + \omega_{22} \,.$$

Λύνοντας ως προς $\frac{P_2}{P_1}$ βρίσκουμε

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(1-a)\omega_{11} + (1-\beta)\omega_{12}}{a\omega_{21} + \beta\omega_{22}} \,.$$

(γ) Από ερ. (α) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\frac{P_2}{P_1} = \frac{(1-a)\omega_{11} + (1-\beta)\omega_{12}}{a\omega_{21} + \beta\omega_{22}}$ (ερ. (β)) έχουμε τα ακόλουθα

$$x_{11}=\frac{a(P_1\omega_{11}+P_2\omega_{21})}{P_1}=a\omega_{11}+a\omega_{21}\frac{(1-a)\omega_{11}+(1-\beta)\omega_{12}}{a\omega_{21}+\beta\omega_{22}},$$

$$x_{21}=\frac{(1-a)(P_1\omega_{11}+P_2\omega_{21})}{P_2}=(1-a)\omega_{11}\frac{a\omega_{21}+\beta\omega_{22}}{(1-a)\omega_{11}+(1-\beta)\omega_{12}}+(1-a)\omega_{21}$$

$$x_{12}=\frac{\beta(P_1\omega_{12}+P_2\omega_{22})}{P_1}=\beta\omega_{12}+\beta\omega_{22}\frac{P_2}{P_1}=\beta\omega_{12}+\beta\omega_{22}\frac{(1-a)\omega_{11}+(1-\beta)\omega_{12}}{a\omega_{21}+\beta\omega_{22}},$$

$$x_{22}=\frac{(1-\beta)(P_1\omega_{12}+P_2\omega_{22})}{P_2}=(1-\beta)\omega_{12}\frac{P_1}{P_2}+(1-\beta)\omega_{22}=(1-\beta)\omega_{12}\frac{a\omega_{21}+\beta\omega_{22}}{(1-a)\omega_{11}+(1-\beta)\omega_{12}}+(1-\beta)\omega_{22}$$

(δ) Αν $a=\beta$, τότε οι σχέσεις του ερ. (γ) γράφονται

$$x_{11}=a\omega_{11}+a\omega_{21}\frac{(1-a)\omega_{11}+(1-\beta)\omega_{12}}{a\omega_{21}+\beta\omega_{22}}=a\omega_{11}+a\omega_{21}\frac{(1-a)\omega_{11}+(1-a)\omega_{12}}{a\omega_{21}+a\omega_{22}}=a\omega_{11}+a\omega_{21}\frac{(1-a)\overline{\omega}_1}{a\overline{\omega}_2},$$

$$x_{21}=(1-a)\omega_{11}\frac{a\omega_{21}+\beta\omega_{22}}{(1-a)\omega_{11}+(1-\beta)\omega_{12}}+(1-a)\omega_{21}=(1-a)\omega_{11}\frac{a\omega_{21}+a\omega_{22}}{(1-a)\omega_{11}+(1-a)\omega_{12}}+(1-a)\omega_{21}=$$

$$=(1-a)\omega_{11}\frac{a\overline{\omega}_2}{(1-a)\overline{\omega}_1}+(1-a)\omega_{21}.$$

$$x_{12}=\beta\omega_{12}+\beta\omega_{22}\frac{(1-a)\omega_{11}+(1-\beta)\omega_{12}}{a\omega_{21}+\beta\omega_{22}}=a\omega_{12}+a\omega_{22}\frac{(1-a)\omega_{11}+(1-a)\omega_{12}}{a\omega_{21}+a\omega_{22}}=\omega_{12}+a\omega_{22}\frac{(1-a)\overline{\omega}_1}{a\overline{\omega}_2},$$

$$x_{22}=(1-\beta)\omega_{12}\frac{a\omega_{21}+\beta\omega_{22}}{(1-a)\omega_{11}+(1-\beta)\omega_{12}}+(1-\beta)\omega_{22}=$$

$$=(1-a)\omega_{12}\frac{a\omega_{21}+a\omega_{22}}{(1-a)\omega_{11}+(1-a)\omega_{12}}+(1-a)\omega_{22}=(1-a)\omega_{12}\frac{a\overline{\omega}_2}{(1-a)\overline{\omega}_2}+(1-a)\omega_{22}.$$

Θέμα 6ο. (α) Το άτομο/επιχειρηματίας λύνει το πρόβλημα

$$\max_{y,l} .\, y^{0,5} l^{0,5} - wl - ry$$

και βρίσκει τις

Συνθήκες α' τάξης

$0,5 y^{-0,5} l^{0,5} - r = 0$

$0,5 y^{0,5} l^{-0,5} - w = 0$.

(β) Θέτουμε μέσα στις παραπάνω δύο εξισώσεις $y = 1$ οπότε αυτές γράφονται

$0,5 l^{0,5} - r = 0$ και $0,5 l^{-0,5} - w = 0$. Λύνοντας και τις δύο ως προς l βρίσκουμε

$l = 4r^2$ και $l = \frac{1}{4w^2}$. Με δεδομένο ότι τα πρώτα μέλη είναι ίσα, τότε και τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, δηλαδή

$4r^2 = \frac{1}{4w^2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{4w}$.

(γ) Ο εισοδηματικός περιορισμός δίνεται από την εξίσωση $x = wl + \frac{1}{4w}$. Άρα το άτομο/καταναλωτής λύνει

$$\max_{x,l} .\, u(x, 1-l) = x^a (1-l)^{1-a}$$

$$s.t. x = wl + \frac{1}{4w}.$$

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x,l,\lambda) = x^a (1-l)^{1-a} - \lambda\left(x - wl - \frac{1}{4w}\right)$$

και βρίσκουμε τις

Συνθήκες α' τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x}=ax^{a-1}(1-l)^{1-a}-\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l}=(1-a)x^{a}(1-l)^{-a}+w\lambda=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{1}{4w}+wl-x=0.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τη δεύτερη εξίσωση με την πρώτη βρίσκουμε $x=\dfrac{aw(1-l)}{1-a}$ την οποία αντικαθιστούμε μέσα στον εισοδηματικό περιορισμό τον οποίο λύνουμε στη συνέχεια ως προς l οπότε βρίσκουμε τη συνάρτηση προσφοράς εργασίας

$$l^{S}(w)=\frac{a(4w^2+1)-1}{4w^2}.$$

Θέμα 7ο. Η νέα κατανομή την οποία προτείνει ο 1 στον 2 είναι η $((5,5),(2,2))$. Στη νέα κατανομή ο 2 έχει χρησιμότητα $u_2(2,2)=4<u_2(5,1)=5$. Άρα ο 2 δεν θα δεχθεί την ανταλλαγή.

Θέμα 8ο. Για την κατανομή $((x_1,y_1),(x_2,y_2))=((3,5),(4,2))$ έχουμε τα ακόλουθα

$$MRS_1=\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}=\frac{2x_1y_1}{x_1^2}=\frac{2y_1}{x_1}\Rightarrow MRS_1(3,5)=\frac{2\cdot 5}{3}=\frac{10}{3}$$ και

$$MRS_2=\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{\frac{\partial u_2}{\partial y_2}}=\frac{y_2}{x_2}\Rightarrow MRS_2(4,2)=\frac{1}{2}\neq\frac{10}{3}$$. Άρα η συγκεκριμένη κατανομή δεν είναι άριστη κατά Pareto.

Για την κατανομή $((x_1,y_1),(x_2,y_2))==((6,3),(3,3))$ έχουμε $x_1+x_2=6+3=9>7.$ Αδύνατο. Τέλος για την κατανομή $((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = ((4,2.8),(3,4.2))$ έχουμε

$MRS_1(4,2.8) = \dfrac{2\cdot 2,8}{4} = \dfrac{5,6}{4} = 1,4 = MRS_2(3,4.2) = \dfrac{4,2}{3}$ και $x_1 + x_2 = 7, y_1 + y_2 = 7$. Άρα η

$((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = ((4,2.8),(3,4.2))$ είναι άριστη κατά Pareto.

Θέμα 9ο. Λύνουμε το πρόβλημα

$$\max_{x_{11},x_{21},x_{12},x_{22}} .\ u_1(x_{11}, x_{21})$$

$$s.t. u_2(x_{12}, x_{22}) = \overline{u}_2$$

$$T(X^1, X^2) = 0.$$

Η συνάρτηση $T(X^1, X^2) = 0$ είναι η συνάρτηση παραγωγικών δυνατοτήτων της οικονομίας της οποία το γράφημα λέγεται καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων (ΚΠΔ). Οι μεταβλητές X^1, X^2 είναι απλά τα αθροίσματα $X^1(x_{11}, x_{12}) = x_{11} + x_{12}, X^2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} + x_{22}$. Η κλίση μιας δοσμένης ΚΠΔ λέγεται οριακός λόγος μετασχηματισμού (MRT) και είναι ίσος με $dT = \dfrac{\partial T}{\partial X^1} dX^1 + \dfrac{\partial T}{\partial X^2} dX^2 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{dX^2}{dX^1} = MRT = \dfrac{\frac{\partial T}{\partial X^1}}{\frac{\partial T}{\partial X^2}}$.

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, \lambda_1, \lambda_2) = u_1(x_{11}, x_{21}) - \lambda_1(u_2(x_{12}, x_{22}) - \overline{u}_2) - \lambda_2 T(X^1, X^2)$$

και βρίσκουμε τις

Συνθήκες α' τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x_{11}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial X^1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{21}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_{21}} - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial X^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{12}} = -\lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_{12}} - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial X^1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{22}} = -\lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_{22}} - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial X^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -u_2(x_{12}, x_{22}) + \bar{u}_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -T(X^1, X^2) = 0 .$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο πρώτες εξισώσεις βρίσκουμε $\dfrac{\frac{\partial u_1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_{21}}} = \dfrac{\frac{\partial T}{\partial X^1}}{\frac{\partial T}{\partial X^2}}$. Διαιρώντας κατά μέλη την τρίτη κατά σειρά εξίσωση με την τέταρτη κατά σειρά εξίσωση βρίσκουμε $\dfrac{\frac{\partial u_2}{\partial x_{12}}}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{22}}} = \dfrac{\frac{\partial T}{\partial X^1}}{\frac{\partial T}{\partial X^2}}$. Με δεδομένο ότι τα δεύτερα μέλη των παραπάνω εξισώσεων είναι τα ίδια, τότε το ίδιο ισχύει και για τα πρώτα οπότε έχουμε ότι

$\dfrac{\frac{\partial u_1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_{21}}} = \dfrac{\frac{\partial u_2}{\partial x_{12}}}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{22}}} = \dfrac{\frac{\partial T}{\partial X^1}}{\frac{\partial T}{\partial X^2}}$ ή εξ ορισμού του MRS και του MRT, $MRS_1 = MRS_2 = MRT$.

Θέμα 10ο. Το άτομο/παραγωγός λύνει

$$\max_{x,l} . x - wl$$

$$s.t. x = 12\sqrt{l}\ .$$

Η διαφορά $x - wl$ είναι το κέρδος του ατόμου/παραγωγού. Αντικαθιστώντας τον ισοτικό περιορισμό μέσα στην αντικειμενική συνάρτηση λύνουμε

$$\max_{l}. 12\sqrt{l} - wl$$

και βρίσκουμε τη

Συνθήκη α' τάξης

$\dfrac{6}{\sqrt{l}} = w \Leftrightarrow l^{D}(w) = \dfrac{36}{w^{2}}$.

Άρα $x(l^{D}) = 12\sqrt{\dfrac{36}{w^{2}}} = \dfrac{72}{w}$.

Το άτομο/καταναλωτής λύνει

$$\max_{x,l}. u(l,x) = x - \frac{l^{2}}{9}.$$

$$s.t. x = wl + \pi\ ,$$

όπου $\pi =$ κέρδος από την επιχ/ση της οποίας είναι ιδιοκτήτης.

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x,l,\lambda) = x - \frac{l^{2}}{9} - \lambda(x - wl - \pi)$$

και βρίσκουμε τις

Συνθήκες α' τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = -\frac{2l}{9} + \lambda w = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = wl + \pi - x = 0 .$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις συνεπάγεται $l^S(w) = \frac{9w}{2}$. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην τρίτη εξίσωση

βρίσκουμε $x^D = \frac{9w^2}{2} + \pi$. Σε γενική ισορροπία ισχύει εξ ορισμού ότι $l^D = l^S \Rightarrow \frac{36}{w^2} = \frac{9w}{2} \Leftrightarrow w = 2$

(αμοιβή εργασίας σε γενική ισορροπία) $\Rightarrow l^S = l^D = 9$. Άρα $x^S(2) = 12\sqrt{\frac{36}{2^2}} = 36$ και

$x^D = \frac{9w^2}{2} + \pi \Rightarrow 36 = \frac{9 \cdot 2^2}{2} + \pi \Leftrightarrow \pi = 18$. Συνοψίζοντας η ανταγωνιστική (Βαλρασιανή, γενική) ισορροπία

είναι το διάνυσμα $(l, x) = (9, 36)$.