Μικροοικονομική της Αβεβαιότητας

1. Εναλλακτικές προσεγγίσεις στην ανάλυση των αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

1.1 Εισαγωγή.

Κάτω από συνθήκες πλήρους βεβαιότητας οι αποφάσεις μίας οικονομικής μονάδας, οδηγούν σε βέβαια αποτελέσματα. Η θεωρία του καταναλωτή παρέχει ένα τέτοιο παράδειγμα, όπου στόχος της απόφασης είναι η επιλογή ενός συγκεκριμένου "καλαθιού" αγαθών. Τα στοιχεία του λογισμού επιλογής στην περίπτωση αυτή είναι οι προτιμήσεις μεταξύ αγαθών που χαρακτηρίζουν το συγκεκριμένο καταναλωτή, το διαθέσιμο εισόδημα και οι τιμές των αγαθών που ορίζονται από την αγοραία διαδικασία - στοιχεία που είναι γνωστά την στιγμή λήψης της απόφασης. Επιπλέον ο καταναλωτής θεωρείται ότι γνωρίζει όλες τις δυνατότητες κατανάλωσης, δηλαδή, όλα τα διαθέσιμα αγαθά στην αγορά. Το αποτέλεσμα της απόφασης που εκτελείται κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, είναι η σύνθεση ενός "καλαθιού" αγαθών, όπου το βάρος (ποσότητα) του κάθε συστατικού είναι αυστηρά καθορισμένο. Όταν το οικονομικό γίγνεσθαι εξελίσσεται κάτω από συνθήκες βεβαιότητας, δεν επιβάλλεται να ξεχωρίσουμε μεταξύ της διαδικασίας επιλογής ενός καλαθιού αγαθών και της πράξης κατανάλωσης του - η ανάλυση σταματά στο σημείο όπου η απόφαση ολοκληρώνεται. Η απόφαση και οι συνέπειες της ταυτίζονται απόλυτα.

Κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας οι συνέπειες μίας απόφασης παραμένουν άγνωστες, έως ότου η αβεβαιότητα αρθεί με τη διέλευση του χρόνου. Επιστρέφουμε στον λογισμό της άριστης κατανάλωσης. Ο καταναλωτής έχει τη δυνατότητα να επιλέξει το ιδανικό για τις προτιμήσεις του καλάθι αγαθών, αλλά κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας είναι δυνατόν να μη γνωρίζει αν το καλάθι αυτό είναι διαθέσιμο στην αγορά ή να αγνοεί τις ακριβείς τιμές διάθεσης των αγαθών. Η λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας απαιτεί το συνυπολογισμό κατά το καλύτερο εφικτό τρόπο όλων των δυνητικών συνεπειών των πράξεων που απορρέουν από κάθε απόφαση. Το επίπεδο χρησιμότητας που θα επιτευχθεί τελικά, εξαρτάται όχι μόνο από την απόφαση στην οποία καταλήγει η οικονομική μονάδα αλλά και από την έκβαση των συνθηκών αβεβαιότητας, δηλαδή από το ποια "κατάσταση του κόσμου" θα επέλθει.

1.2 Ενέργειες (Αποφάσεις) και Καταστάσεις Κόσμου.

Οι συνέπειες που εμφανίζονται ως τελικά αποτελέσματα απορρέουν από μία επιλεγμένη ενέργεια και την υλοποίηση μίας συγκεκριμένης κατάστασης κόσμου. Η λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας, συνεπάγεται την επιλογή κάποιας ενέργειας πριν γίνει γνωστό το ποια κατάσταση κόσμου θα επικρατήσει. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι πρέπει να αποφασίσετε σήμερα αν θα επισκεφτείτε κάποιο φίλο σας αύριο. Πριν πάρετε την απόφαση σας θα θέλατε να ξέρετε τι καιρό θα κάνει αύριο, αφού αν βρέξει η επίσκεψη σας μπορεί να γίνει δυσάρεστη. Δυστυχώς, πρέπει να ειδοποιήσετε το φίλο σας σήμερα, για να είναι ελεύθερος σε περίπτωση που τον επισκεφθείτε. Η επιλογή που τίθεται είναι μεταξύ της ενέργειας "επισκέπτομαι" και της ενέργειας "δεν επισκέπτομαι", ενώ οι καταστάσεις κόσμου είναι "βροχή" και "καλοκαιρία". Το επίπεδο χρησιμότητας που θα αποκομίσετε εξαρτάται τόσο από την απόφαση σας όσο και από τη φύση. Ας υποθέσουμε ότι τα επίπεδα χρησιμότητας που αντιστοιχούν στα ζεύγη ενέργειας - κατάστασης κόσμου είναι

επίσκεψη/βροχή 1/4

επίσκεψη/καλοκαιρία 1

μη επίσκεψη/βροχή 1/2

μη επίσκεψη/καλοκαιρία 1/2

Αναδιατάσσοντας τα στοιχεία αυτά σε μορφή πίνακα, έχουμε

Πίνακας 2.1

s_1 s_2

		Βροχή	καλοκαιρία
a_1	Επίσκεψη	1/4	1
a_2	Μη επίσκεψη	½	½

Το προτιμότερο αποτέλεσμα στο παράδειγμα αυτό έχει χρησιμότητα 1, ενώ το λιγότερο επιθυμητό αποτέλεσμα έχει χρησιμότητα 1/4. Εσείς μπορεί να έχετε διαφορετικές προτιμήσεις ανάλογα με το πόσο αγαπάτε τους φίλου σας και το πόσο σας αρέσει η βροχή. Η επιλογή μεταξύ των ενεργειών a_1 και a_2 πρέπει να γίνει πριν υλοποιηθεί η κατάσταση κόσμου (είτε το s_1, είτε το s_2). Σ' αυτό το κεφάλαιο καθώς και στο επόμενο, αναπτύσσονται οι εναλλακτικές προσεγγίσεις στη λύση του προβλήματος αυτού. Στο υπόλοιπο βιβλίο παρουσιάζονται διάφορες εφαρμογές με οικονομικό περιεχόμενο.

Μέχρι τώρα έχουμε παρακάμψει τις δυσκολίες που ανακύπτουν από την προσπάθεια ορισμού του όρου αβεβαιότητα. Ορισμένοι θεωρούν ότι συνθήκες αβεβαιότητας επικρατούν όταν αδυνατούμε να αποδώσουμε πιθανότητες στις καταστάσεις κόσμου. Στο παράδειγμα μας δεν αποδώσαμε κάποια πιθανότητα στην κατάσταση κόσμου "βροχή". Αν αποδίδαμε τέτοιες πιθανότητες, σύμφωνα με την άποψη αυτή, τότε πρέπει να μιλάμε για επιχειρηματικό κίνδυνο (risk) αντί για αβεβαιότητα (uncertainty). Με βάση τον ορισμό αυτό, το βιβλίο τούτο πραγματεύεται σχεδόν αποκλειστικά την περίπτωση του επιχειρηματικού κινδύνου. Είναι φανερό ότι δεν ασπάζομαι τη διάκριση αυτή. Για μένα όπως και για πολλούς άλλους ο όρος αβεβαιότητα απλά υποδεικνύει την έλλειψη βεβαιότητας.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού θα ασχοληθούμε με μεθόδους λήψης αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας που δε χρησιμοποιούν πιθανότητες. Στα επόμενα κεφάλαια θα επεκτείνουμε την ανάλυση ώστε να περιληφθούν οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν πιθανότητες στην ανάπτυξη του αριστοποιητικού λογισμού κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

1.3 Κριτήρια Αποφάσεων.

Εξακολουθούμε να θεωρούμε ότι υπάρχουν μόνο δύο ενέργειες και δύο καταστάσεις κόσμου, έτσι ώστε ο πίνακας αποδόσεων (payoff matrix) να έχει μόνο τέσσερα στοιχεία. 'Εστω ο πίνακας αποδόσεων

Πίνακας 2.2

	s_1	s_2
a_1	6	7
a_2	5	10

τα στοιχεία του οποίου μπορεί να τα θεωρήσουμε εναλλακτικά είτε ως επίπεδα χρησιμότητας, είτε ως χρηματικά ποσά. Το πρόβλημα που τίθεται είναι με πιο τρόπο μπορούμε να επιλέξουμε μεταξύ των ενεργειών a_1 και a_2.

.

1) Maximin. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό αρχικά προσδιορίζεται το σύνολο των χειρότερων δυνατών αποτελεσμάτων, και στη συνέχεια επιλέγεται η ενέργεια που αντιστοιχεί στο μέγιστο του συνόλου αυτών των αποτελεσμάτων. Στο παράδειγμα το χειρότερι αποτέλεσμα που μπορεί να συβμεί αν επιλεγεί η ενέργεια a1 είναι το 6, ενώ αν επιλεγεί η ενέργεια a2 είναι το 5. Σύμφωνα με τον κανόνα Maximin θα επιλεγεί η a1. Ο κανόνας αυτός είναι σχετικά απαισιόδοξος αφού βασίζεται στα χειρότερα αποτελέσματα και μόνο. Έτσι, π.χ., αγνοείται ολότελα το γεγονός ότι αν επιλέγετο η δεύτερη ενέργεια θα υπήρχε η δυνατότητα να κερδίσουμε 10.
2) Minimax. Ο κανόνας αυτός προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει την δυνητική απογοήτευση από την ανάληψη κάποιας ενέργειας, και εστιάζεται πάνω στο κόστος ευκαιρίας κάθε ενέργειας. Η πρώτη κίνηση είναι να μεττρέψουμε τον πίνακα 2.2 στο αντίστοιχο πίνακα απολεσθέντων ευκαιριών. Ας υποθέσουμε ότι η ενέργεια a1 έχει επιλεγεί όταν προκύπτει η κατάσταση s1. Είναι σαφές ότι δεν θα μετανοιώναμε την επιλογή αυτή αφού αν είχαμε επιλέξει την a2 θα αποκτούσαμε μόνο 5. Οπότε το κόστος ευκαιρίας είναι 0. Αν όμως είχαμε επιλέξει την ενέργεια a1 και προέκυπτε η κατάσταση s2, το κόστος ευκαιρίας θα ήταν ίσο με 3. Δηλαδή, την διαφορά του τι θα κερδίζαμε αν είχαμε επιλέξει την ενέργεια a2, δηλαδή 10, και του κέρδους της τρέχουσας απόφασης, 7. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε τον πίνακα απολεσθέντων ευκαιριών 2.3.

Πίνακας 2.3

	S1	S2
,a1	0	3
,a2	1	0

Ο κανόνας Minimax επιλέγει την ενέργεια εκείνη που ενέχει την δυνατότητα να προκύψει το ελάχιστο από τα μέγιστα στοιχεία του πίνακα 2.3. Δηλαδή, ελαχιστοποιεί την δυνατή απογοήτευση που μπορεί να προέλθει από μία απόφαση. Στην περίπτωση αυτή θα επιλέγετο η a2.

3) Maximax. Στο μέτρο που ο κανόνας maximin εκφράζει απαισιοδοξία, ο κανόνας maximax εκφράζει αισιοδοξία. Στη περίπτωση αυτή επιλέγουμε τη μεγαλύτερη απόδοση μέσα από το σύνολο των μεγαλυτέρων αποδόσεων για κάθε ενέργεια. Με βάση το κριτήριο αυτό διαλέγουμε το a_2, στον πίνακα 2.2.

Πριν συνεχίσουμε με την παρουσίαση άλλων κανόνων αποφάσεων, θα εξετάσουμε το μέτρο στο οποίο είναι εύλογη η χρήση των κανόνων που αναπτύξαμε ως τώρα. Έστω ο πίνακας αποδόσεων (1.3)

Πίνακας 2.4

	s_1	s_2
a_1	0	200
a_2	0,5	0,5

ο κανόνας maximin οδηγεί στην επιλογή της ενέργειας a_2. Εσείς θα κάνατε την ίδια επιλογή? Ίσως όχι. Ας εξετάσουμε τώρα τον πίνακα κόστους ευκαιρίας που αντιστοιχεί στον πίνακα 1.3 (1.4).

Πίνακας 2.5

s_1 s_2

a_1	0,5	0,5
a_2	0	199,5

Με τον κανόνα minimax θα επιλέγαμε την ενέργεια a_1. Επιστρέφοντας στον πίνακα 1.4, βλέπουμε ότι με τον κανόνα maximax θα επιλέγαμε επίσης την a_1. Κατά τη γνώμη σας, η επιλογή αυτή είναι παρακινδυνευμένη?

Είναι καθαρό ότι η επιλογή του κανόνα με τον οποίο θα ληφθούν οι αποφάσεις εξαρτάται σε ένα βαθμό από τη φύση του προβλήματος που χρήζει λύσης. Η εξαιρετική επιφυλακτικότητα του κανόνα maximin μπορεί να είναι εύλογη όταν τίθεται θέμα επιλογής μεταξύ κατασκευής ενός πυρηνικού ή ενός υδροηλεκτρικού σταθμού παραγωγής ενέργειας, αλλά ίσως είναι υπερβολική για περιστάσεις όπου τα οφέλη είναι μεγάλα ενώ οι δυνητικές ζημιές μικρές, όπως στον πίνακα 1.4.

Οι απλοί αυτοί κανόνες είναι μάλλον περιορισμένης εμβέλειας, αφού εστιάζονται μόνο σε ένα είδος απόδοσης, αγνοώντας μεγάλο μέρος της πληροφόρησης που εμπεριέχεται σε ένα πίνακα αποδόσεων. Μία σειρά κανόνων αποφάσεων αναπτύχθηκε με τρόπο ώστε να αμβλύνουν την αδυναμία αυτή.

4) Ο κανόνας του Hurwitz. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό υπολογίζεται ένας δείκτης $h(a_i)$, που είναι σταθμισμένος μέσος της μεγαλύτερης και της μικρότερης

απόδοσης που αντιστοιχεί στην κάθε ενέργεια. Επιλέγεται η ενέργεια που αντιστοιχεί στον δείκτη h(.) με τη μεγαλύτερη αξία. Στην

περίπτωση του πίνακα 1.2, οι σχετικοί δείκτες είναι

$$h(a_1) = α6 + (1-α)7$$

$$h(a_2) = α5 + (1-α)10$$

όπου 0 <= α <= 1. Η όποια επιλογή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την αξία του σταθμιστή α, η οποία προσδιορίζεται από το χρήστη του κανόνα. Αν το α =1 τότε ο κανόνας του Hurwitz οδηγεί στην ίδια απόφαση με τον κανόνα maximin, ενώ αν α = 0 η επιλογή ταυτίζεται με αυτή του κανόνα maximax. Όσο το α μεταβάλλεται στο διάστημα 0, 1, τόσο μεταβάλλεται η βαρύτητα του κάθε επιμέρους κανόνα που απαρτίζουν τον κανόνα του Hurwitz. Στο σχήμα 1.1, αν α = 0, $h(a_1)$ = 7, ενώ $h(a_2)$ = 10, οπότε επιλέγεται το a_2. Αν α = 1, τότε $h(a_1)$ = 6 και $h(a_2)$ = 5 οπότε επιλέγεται το a_1. Από την αποτύπωση των δύο εξισώσεων βλέπουμε ότι όσο το α < 0,75 επιλέγεται το a_2, ενώ το a_1 επιλέγεται αν α > 0,75. Όταν α = 0,75, εκφράζεται αδιαφορία μεταξύ των δύο ενεργειών.

Ο κανόνας του Hurwitz αποφεύγει τις ακραίες υποθέσεις των δύο συνιστούντων κανόνων. Όσο η επιλογή του α έχει κάποια βάση, ο κανόνας αυτός φαίνεται λογικός.

Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν δύο προβλήματα με τον κανόνα του Hurwitz. Το πρώτο είναι φανερό από το σχήμα 1.1. Η επιλογή ενέργειας μπορεί να είναι υπερβολικά ευαίσθητη στην αξία του α, π.χ. για αξίες του α γύρω από το 0,75. Το δεύτερο πρόβλημα είναι πρόβλημα λογικής και εστιάζεται στην δυσκολία επιλογής στην περίπτωση αδιαφορίας. Αν το α ήταν ίσο με 0,75, τότε οι δύο ενέργειες θα ήταν ισοδύναμες οπότε δε θα ήταν δυνατό να προβούμε σε κάποια επιλογή. Ενδεχομένως θα μπορούσαμε να επιλύσουμε τη δυσκολία με τη χρήση ενός νομίσματος. Στην περίπτωση αυτή επαυξάνεται το σύνολο των δυνατών ενεργειών, δηλαδή a_1 και a_2, με μία τρίτη ή οποία συνίσταται στο να επιλέγεται το a_1 τις μισές φορές και το a_2 τις υπόλοιπες. Η τρίτη ενέργεια αποτελεί τυχαία μεταβλητή, και πολλές φορές αποκαλείται ως "μικτή στρατηγική". Στη περίπτωση αυτή ο πίνακας αποδόσεων 1.2 μετατρέπεται σε (1.8)

Πίνακας 2.6

	s_1	s_2
a_1	6	7
a_2	5	10
a_3=(0,5a_1, 0,5a_2)	5.5	8.5

Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιείται ο κανόνας του Hurwitz, έτσι ώστε η επιλογή α καθορίζεται από τη μέγιστη αξία του δείκτη h(.). Έστω α = 0,75, που όπως γνωρίζουμε οδηγεί στην ισοδυναμία των ενεργειών a_1 και a_2. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$h(a_1) = 0,75(6) + 0,25(7) = 6,25$$

$$h(a_2) = 0,75(5) + 0,25(10) = 6,25$$

$$h(a_3) = 0,75(5,5) + 0,25(8,5) = 6,25$$

πράγμα που επιβεβαιώνει ότι η μικτή στρατηγική ικανοποιεί τις ανάγκες επίλυσης της αδιαφορίας αφού ο δείκτης που αντιστοιχεί σε αυτή είναι τουλάχιστον όσο μεγάλος όσο ο δείκτης κάθε άλλης δυνατής επιλογής.

Αναλογιστείτε όμως την παρακάτω περίπτωση, όταν α = 0,25

Πίνακας 2.7

	s_1	s_2
a_1	0	1
a_2	1	0
$a_3=(0,5a_1, 0,5a_2)$	0,5	0,5

1.9

στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $h(a_1) = 0,75$, $h(a_2) = 0,75$, (οπότε είμαστε αδιάφοροι μεταξύ a_1 και a_2), αλλά $h(a_3) = 0,375$, οπότε δε θα ήμασταν διατεθειμένοι να επιλέξουμε με βάση τη ρίψη ενός νομίσματος. Με πιο τρόπο θα επιλύατε εσείς το πρόβλημα της αδιαφορίας στην περίπτωση αυτή?

Η ιδέα της στάθμισης των αποτελεσμάτων θα αναπτυχθεί σε βάθος στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα εξετάσουμε τρόπους με τους οποίους κατασκευάζονται σταθμιστές έτσι ώστε να αποκλείουν ακραία συμπεριφορά.

5) Η αρχή της μη επαρκούς αιτιάσεως. Μία πιθανή αντίρρηση που μπορεί να εκφραστεί σχετικά με τα κριτήρια αποφάσεων που έχουν αναπτυχθεί μέχρι εδώ είναι ότι έχουμε αγνοήσει την πιθανότητα έλευσης κάθε κατάστασης κόσμου. Οι περισσότεροι από εμάς συχνά προσπαθούν να εκτιμήσουν την πιθανότητα υλοποίησης κάποιου γεγονότος. Επιστρέφοντας σε ένα παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω, έστω ότι s1 και s2 αντιστοιχούν με τα γεγονότα "βροχή αύριο" και "καλοκαιρία αύριο". Ακόμη και αν έχουμε επιφυλάξεις σχετικά με την ικανότητα μας να αποδώσουμε πιθανότητες στα δύο αυτά δυνητικά γεγονότα, συχνά θα ήμασταν διατεθειμένοι να εκφράσουμε γνώμη ως προς το πιο γεγονός θεωρούμε πιθανότερο να υλοποιηθεί. Η γνώμη αυτή συνήθως βασίζεται σε πληροφόρηση που προέρχεται από ετερόκλητες πηγές, όπως τις τρέχουσες καιρικές συνθήκες, την εμπειρία σχετικά με τον καιρό την ανάλογη εποχή καθώς και τα δελτία πρόγνωσης καιρού. Παρ' όλα

αυτά είναι αδύνατο να αποδώσουμε πιθανότητες στα γεγονότα αυτά. Η αρχή της μη επαρκούς αιτίασης, συνίσταται στο να αποδώσουμε ίσες πιθανότητες σε όλα τα γεγονότα όταν δεν έχουμε στοιχεία βάση των οποίων να διαφοροποιήσουμε την πιθανοφάνεια της κάθε κατάστασης κόσμου. Αν λοιπόν υπάρχει η αίσθηση ότι πρέπει να αποδοθούν πιθανότητες σχετικά με την υλοποίηση κάθε κατάστασης κόσμου, αλλά δεν υπάρχει επαρκής πληροφόρηση που να επιτρέπει τον υπολογισμό των πιθανοτήτων αυτών, τότε μία λύση είναι να θεωρηθούν όλες οι πιθανότητες ίσες.

Αφού αποδοθούν οι πιθανότητες αυτές, το κριτήριο αποφάσεων είναι η επιλογή της ενέργειας που έχει τη μεγαλύτερη προσδοκώμενη απόδοση. Αν στο παράδειγμα 1.2 αποδώσουμε ίσες πιθανότητες ως προς την έκβαση των καταστάσεων κόσμου, (βέβαια, το άθροισμα των πιθανοτήτων αυτών πρέπει να αθροίζει στη μονάδα)

Πίνακας 2.8

	s_1	s_2
	(0,5)	(0,5)
a_1	6	7
a_2	5	10

1.10

Αν $E(a_i)$ είναι η προσδοκώμενη αξία της ενέργειας i, τότε έχουμε

$E(a_1) = 0.5(6) + 0,5(7) = 6,5$

$$1.11$$

$E(a_2) = 0,5(5) + 0,5(10) = 7,5$

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, επιλέγεται η δεύτερη ενέργεια. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι δείκτες προσδοκώμενης απόδοσης της αρχής της μη επαρκούς αιτιάσεως, παίζουν τον ίδιο ρόλο με τους δείκτες h του κριτηρίου του Hurwitz, αφού και οι δύο δείκτες είναι σταθμισμένοι μέσοι των αποδόσεων. Η διαφορά μεταξύ των δύο συνίσταται στο ότι ενώ οι σταθμιστές των δεικτών h επιλέγονται υποκειμενικά, οι σταθμιστές της προσδοκώμενης απόδοσης επιβάλλονται από την αρχή της μη επαρκούς αιτιάσεως.

1.4 ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΙΓΝΙΑ

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει το πρόβλημα των αποφάσεων σε περιβάλλον αβεβαιότητας που εκφράζεται από την ύπαρξη εναλλακτικών καταστάσεων κόσμου. Τα περισσότερα προβλήματα που εξετάζονται στο βιβλίο αυτό είναι αυτής της μορφής. Μπορούμε όμως να υποθέσουμε ότι τα τελικά αποτελέσματα των ενεργειών που αναλαμβάνουμε αντί να εξαρτώνται από τη φύση, εξαρτώνται από τις ενέργειες που αναλαμβάνει κάποιος άλλος φορέας αποφάσεων. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε ένα παίγνιο. Ο "αντίπαλος" δεν είναι πια η απρόσωπη και αδέκαστη φύση αλλά ένα άτομο το οποίο προσπαθεί να επιτύχει τους δικούς του στόχους, ακριβώς όπως εμείς. Έτσι ο αντίπαλος θα προσπαθήσει να προεξοφλήσει τι αντιδράσεις μας και το ίδιο θα προσπαθήσουμε να κάνουμε και εμείς. Στο βιβλίο αυτό η ανάλυση περιορίζεται στα "παίγνια ενάντια στη φύση" αποκλείοντας τα "παίγνια ενάντια σε ανθρώπους".

1.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράψαμε ένα αριθμό εναλλακτικών κανόνων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λήψη αποφάσεων στα πλαίσια αβέβαιου περιβάλλοντος, όταν τα τελικά αποτελέσματα των όποιων ενεργειών, δηλαδή τα στοιχεία του πίνακα αποδόσεων, μπορούν να ερμηνευτούν είτε ως χρηματικά ποσά είτε ως επίπεδα χρησιμότητας.

Στο επόμενο κεφάλαιο η ανάλυση επεκτείνεται σε δύο κατευθύνσεις. Πρώτο υποθέτουμε ότι είναι δυνατό να αποδοθούν πιθανότητες στις καταστάσεις κόσμου, οπότε μπορούμε να εξετάσουμε τις περιπτώσεις επιχειρηματικού κινδύνου. Έτσι είτε βασιζόμενοι σε παρελθούσες εμπειρίες είτε σε υποκειμενικές εκτιμήσεις, μπορούμε να πούμε ότι η κατάσταση κόσμου s_1 υλοποιείται με πιθανότητα p_1 και η s_2 με πιθανότητα p_2. Είναι φανερό ότι οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στο τμήμα 2.3 αποτελούν μία πρώτη προσέγγιση επίλυσης του προβλήματος αυτού. Αν οι πιθανότητες p_1 και p_2 ερμηνευτούν ως δείκτες αισιοδοξίας και απαισιοδοξίας αντίστοιχα, τότε η προσέγγιση αυτή ταυτίζεται με αυτή του Hurwitz. Αν $p_1 = p_2 = 0{,}5$, τότε ταυτίζεται με τις συνθήκες που περιγράφονται από την αρχή της μη επαρκούς αιτιάσεως. Όταν τα p_1 και p_2 ερμηνεύονται ως (όχι αναγκαστικά ίσες) πιθανότητες, και αν τα στοιχεία του πίνακα αποδόσεων 1.2 είναι χρηματικά ποσά, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την προσδοκώμενη απόδοση ως

$$E(a_1) = p_1(6) + p_2(7) = 6{,}5$$

$$E(a_2) = p_1(5) + p_2(10) = 7{,}5 \tag{1.11}$$

όπου $p_1 + p_2 = 1$.

Αν η επιλογή ενέργειας γίνει με βάση την ψηλότερη προσδοκώμενη απόδοση, η επιλογή μας θα εξαρτηθεί από την αξία των πιθανοτήτων p_1 και p_2. Έστω ότι $p_1 = 0{,}22$ και $p_2 = 0{,}78$, τότε $E(a_1) = 6{,}78$ και $E(a_2) = 8{,}9$, οπότε επιλέγουμε την ενέργεια a_2. Το κριτήριο αυτό, της προσδοκώμενης αξίας, έχει το πλεονέκτημα ότι σταθμίζει τα διάφορα εναλλακτικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας ως σταθμιστές τις πιθανότητες που αντιστοιχούν στις σχετικές καταστάσεις κόσμου. Έχει όμως το μειονέκτημα ότι δεν μπορεί να καλύψει τις περιπτώσεις όπου το επίπεδο χρησιμότητας δε βρίσκεται σε αντιστοιχία ένα προς ένα με το ύψος της χρηματικής απόδοσης. Για παράδειγμα αποκλείεται η περίπτωση της φθίνουσας οριακής χρησιμότητας του χρήματος.

Η δεύτερη κατεύθυνση στην οποία επεκτείνεται η ανάλυση είναι η εξέταση της σχέσης της χρηματικής απόδοσης με κάποιο δείκτη χρησιμότητας. Όπως θα δούμε πρέπει να είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί ώστε η επιλογή του μέτρου χρησιμότητας να είναι τέτοια ώστε να οδηγεί σε συνεπείς αποφάσεις.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε την αβεβαιότητα με τέτοιο τρόπο ώστε η επιλογή μίας ενέργειας από ένα φορέα αποφάσεων οδηγεί, όχι σε ένα, αλλά σε πολλαπλά δυνητικά αποτελέσματα σταθμισμένα με τις πιθανότητες έκβασης του καθενός, με άλλα λόγια σε ένα λαχνό. Παρουσιάσαμε μία σειρά από κριτήρια με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να παρθεί μία απόφαση, μεταξύ των οποίων και ένα που συνίσταται στην μεγιστοποίηση της προσδοκώμενης χρηματικής αξίας των αποτελεσμάτων.

Για παράδειγμα σκεφθείτε δύο εναλλακτικές δυνητικές ενέργειες που οδηγούν στην επιλογή ενός εκ των δύο λαχνών

L^1 = [(0,2 ; 50), (0,6 ; 25), (0,2 ; 10)] 2.1

L^2 = [(0,3 ; 50), (0,4 ; 25), (0,3 ; 10)] 2.2

Η προσδοκώμενη αξία του L^1 είναι 27 ενώ αυτή του L^2 είναι 28, οπότε ο λαχνός L^2 είναι προτιμότερος. Κοιτάζοντας όμως προσεκτικότερα τους δύο λαχνούς μπορούμε να αναρωτηθούμε αν όντως ο L^2 είναι προτιμότερος από τον L^1. Η σύγκριση μεταξύ των δύο λαχνών μπορεί να γίνει σε διαφορετική βάση από την προσδοκώμενη αξία τους. Δύο, τουλάχιστον, τρόποι είναι

1. ο L^2 είναι προτιμότερος επειδή ενέχει μεγαλύτερη ελπίδα κέρδους 50 μονάδων.
2. ο L^2 υστερεί επειδή ενέχει μεγαλύτερη ελπίδα κέρδους μόνο 10 μονάδων.

Είναι λοιπόν δυνατό ότι οι προτιμήσεις ενός φορέα αποφάσεων δεν αντικατοπτρίζονται πιστά από τη σύγκριση των λαχνών με βάση την προσδοκώμενη αξία.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται μία θεωρία που επιτρέπει την πιστή και συστηματική απεικόνιση της αντιμετώπισης του επιχειρηματικού κινδύνου από ένα φορέα αποφάσεων. Η θεωρία αυτή έχει ευρύ πεδίο εφαρμογής, για παράδειγμα επιτρέπει την ανάλυση μη χρηματικών αποτελεσμάτων). Στο υπόλοιπο του τμήματος αυτού θα περιγράψουμε τη θεωρία αυτή μόνο στην περίπτωση δίκαιων λαχνών που έχουν μόνο δύο χρηματικά αποτελέσματα. Ένας λαχνός (ή στοίχημα) είναι δίκαιο όταν κάθε δυνητικό αποτέλεσμα έχει ίση πιθανότητα να υλοποιηθεί. Εξετάζοντας τους δύο παρακάτω λαχνούς

$$L^3 = [(0,5\ ;\ 50),\ (0,5\ ;\ 10)] \qquad 2.3$$

$$L^4 = [(0,5\ ;\ 30),\ (0,5\ ;\ 30)] \qquad 2.4$$

βλέπουμε ότι οι δύο λαχνοί έχουν την ίδια προσδοκώμενη αξία. Τούτο όμως δε σημαίνει ότι θα ήμασταν αδιάφοροι μεταξύ των δύο αυτών λαχνών, δεδομένου ότι ο L^4 δίνει 30 μονάδες με σιγουριά, ενώ ο L^3 δίνει 30 μόνο κατά μέσο όρο. ένας τρόπος για να διαπιστώσετε τις προτιμήσεις σας μεταξύ λαχνών είναι να αναρωτηθείτε πόσα χρήματα θα ήσασταν διατεθειμένοι να διαθέσετε για την αγορά του κάθε λαχνού. Το μέγιστο που θα έπρεπε να ήσασταν διατεθειμένοι να πληρώσετε για τον L^4 είναι 30 μονάδες (γιατί ?). Για τον L^3 θα ήσασταν όμως διατεθειμένοι να πληρώσετε 30 ? Ίσως όχι. Οπότε στην περίπτωση αυτή οι προτιμήσεις σας μεταξύ του L^3 και του L^4 δεν αντικατοπτρίζονται πιστά από την προσδοκώμενη αξία των λαχνών.

Για να εκθέσουμε την ιδέα αυτή πιο καθαρά θα εξετάσουμε τον ακόλουθο δίκαιο λαχνό. Ο λαχνός αυτός αντιστοιχεί στην επαναλαμβανόμενη ρίψη ενός (μη φαλκιδευμένου) νομίσματος. Αν σε κάποια ρίψη το νόμισμα έρθει κορόνα, τότε δεν κερδίζετε τίποτε και το παιχνίδι τελειώνει. Όσο το νόμισμα συνεχίζει να έρχεται γράμματα, κερδίζετε (2ν) όπου ν είναι ο αριθμός των ρίψεων που έχει εκτελεστεί μέχρι την στιγμή εκείνη. Έτσι η πιθανότητα να κερδίσει κανείς 4 είναι 1/4, δηλαδή, η πιθανότητα το παιχνίδι να περάσει την πρώτη ρίψη χωρίς να διακοπεί, επί την πιθανότητα το νόμισμα να έρθει γράμματα τη δεύτερη ρίψη. κοκ. Η προσδοκώμενη χρηματική αξία του παιγνίου αυτού είναι

$$(2 \times 1/2) + (4 \times 1/4) + (8 \times 1/8) + \ldots = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = \text{άπειρο}, \quad 2.5$$

Η προσδοκώμενη αξία του λαχνού αυτού είναι άπειρη, αλλά κανένας δε θα πλήρωνε ένα τέτοιο ποσό για να τον αγοράσει. Το πρόβλημα αυτό, γνωστό ως το παράδοξο της Αγ. Πετρούπολης, επιδεικνύει την αδυναμία της προσδοκώμενης χρηματικής αξίας ως κριτήριο επιλογής μεταξύ λαχνών.

Οι επιφυλάξεις που συναντώνται σχετικά με τη προσδοκώμενη αξία ως κριτήριο επιλογής μεταξύ των λαχνών που έχουν εξεταστεί μέχρις εδώ, απορρέουν από κοινή αιτία. Η προσδοκώμενη αξία δε μπορεί να αποδώσει με ακρίβεια την επίδραση ακραίων εκβάσεων στις προτιμήσεις κάτω από καθεστώς αβεβαιότητας. Οι περισσότεροι από μας θα συμφωνούσαν ότι οι δυνατότητα να κερδίσουμε τίποτα δεν αποδίδεται επαρκώς στο παράδοξο της Αγ. Πετρούπολης. Το ίδιο μπορεί να ισχύει και στη περίπτωση των λαχνών L^1, L^2, και L^3. Θα έπρεπε λοιπόν να υπάρχει μία μέθοδος η οποία να ανταποκρίνεται στις δυσκολίες αυτές. Στο επόμενο τμήμα αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τρόπος συνεπούς επιλογής μεταξύ λαχνών αν η διαδικασία επιλογής είναι συμβατή με μία σειρά αξιωμάτων.

2.2 Η ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μόνο τέσσερα δυνατά αποτελέσματα, τα οποία για ευκολία θα τα θεωρήσουμε ως χρηματικά ποσά, y_i ($i = 1,....,4$). Η υπόθεση αυτή γίνεται μόνο για ευκολία της παρουσίασης και η θεωρία που ακολουθεί ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό αποτελεσμάτων.

Αξίωμα 1.

Υπάρχει πλήρης και συνεπής ταξινόμηση στο σύνολο των αποτελεσμάτων.

(i) Για κάθε y_i και y_j είτε

$y_i \succsim y_j$ (το yi προτιμάται ή είναι αδιάφορο από το yj)

ή

$y_j \succsim y_i$ (το yj προτιμάται ή είναι αδιάφορο από το yi)

(ii) $If\ y_i \succsim y_j$ and $y_j \succsim y_i$ then $y_i \sim y_j$

(iii) $If\ y_i \succsim y_j$ and $y_j \succsim y_k$ then $y_i \succsim y_k$

(iv) $if\ y_i \succsim y_j$ then $y_i \geq y_j$ (το περισσότερο προτιμάτε από το λιγότερο.)

Θα υποθέσουμε ότι $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq y_4$ οπότε από το (iv) έχουμε ότι $y_1 \succsim y_2 \succsim y_3 \succsim y_4$

Ένας λαχνός συμβολίζεται από L = [{p_i , y_i} i = 1,...,4]. Ένας λαχνός είναι ένα σύνολο ζεύγη αποτελεσμάτων και των αντιστοίχων πιθανοτήτων υλοποίησης, έτσι ώστε p_i >= 0, i = 1,...,4 και $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$. Η υλοποίηση ενός αποτελέσματος αποκλείει την ταυτόχρονη υλοποίηση ενός άλλου.

Αξίωμα 2.

Για όλους τους δυνατούς λαχνούς υπάρχει κατάταξη των προτιμήσεων που είναι πλήρης και συνεπής.

(i) είτε $L^i \succsim L^j$ or $L^j \succsim L^i$

(ii) Αν $L^i \succsim L^j$ and $L^j \succsim L^{\hat{e}}$ then $L^i \succsim L^{\hat{e}}$

Η ουσία του προβλήματος είναι να βρεθεί ένα κριτήριο με το οποίο να μπορούμε να πούμε για οποιοδήποτε σύνολο λαχνών ποιος λαχνός είναι προτιμότερος και κατά συνέπεια θα επιλεγεί.

Αξίωμα 3.

Έστω ένας λαχνός που αποδίδει είτε y_1 είτε y_4, δηλαδή το μικρότερο και το μεγαλύτερο των αποτελεσμάτων. Για κάθε y_i υπάρχει ένας αριθμός u_i μεταξύ 0 και 1 τέτοιος ώστε το y_i να είναι αδιάφορο με ένα λαχνό όπου το y_1 έχει πιθανότητα u_i και το y_4, πιθανότητα (1-u_i). Ένας τέτοιος λαχνός αποκαλείται λαχνός αναφοράς για το y_i,

$$L_i^* \equiv [u_i y_1; (1-u_i) y_4] \sim y_i$$

Το u_i δεν είναι η πιθανότητα υλοποίησης του y_i. Είναι η πιθανότητα υλοποίησης του y_i που θα έπρεπε να ισχύει έτσι ώστε ο φορέας αποφάσεων να είναι αδιάφορος μεταξύ του yi και ενός λαχνού που έχει ως αποτελέσματα μόνο το y_1 και το y_4. Για την ακρίβεια, το u_i αποτελεί υποκειμενική εκτίμηση του φορέα αποφάσεων. Θα επανέλθουμε στο σημείο αυτό αργότερα.

Είναι φανερό ότι πρέπει

$L_1^* \equiv [1y_1; 0y_4] \sim y_1$ οπότε u1=1

και

$L_4^* \equiv [0y_1; 1y_4] \sim y_4$ οπότε u4=0

εξετάζοντας το λαχνό αναφοράς για το y_2,

$$L_2^* \equiv [u_2 y_1; (1-u_2) y_4] \sim y_2$$

αφού $y_2 \le y_1$ ο σταθμιστής που αντιστοιχεί στο y_1 στο λαχνό L^*_2 πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος από τον σταθμιστή του y_1 στο λαχνό L^*_1. Οπότε $u_2 \le u_1$. Ομοίως για

$$L_3^* \equiv [u_3 y_1 ; (1-u_3) y_4] \sim y_3$$

επιβάλλεται $u_3 \le u_2$, οπότε έχουμε την πλήρη κατάταξη των προτιμήσεων έτσι ώστε

$$u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge u_4 \text{ και } u_1 = 1,\ u_4 = 0.$$

Είναι σημαντικό ότι για κάθε y_i υπάρχει ένα και μόνο ένα u_i.

Αξίωμα 4.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο x, που μπορεί να είναι και λαχνός, που είναι αδιάφορο στο y_3. Αφού $x \sim y_3$, τότε υπάρχει αδιαφορία και μεταξύ δύο λαχνών L^1 και L^2 εάν η μόνη διαφορά μεταξύ των είναι ότι ο L^1 περιέχει το y_3 ενώ ο L^2, στη θέση του y_3, περιέχει το x.

Για παράδειγμα, αν

$$L^1 = [(p_1, y_1), (p_2, y_2), (p_3, y_3), (p_4, y_4)]$$

και

$$L^2 = [(p_1, y_1), (p_2, y_2), (p_3, x), (p_4, y_4)]$$

τότε x ~ y_3, σημαίνει $L^1 \sim L^2$.

Επιπλέον αν για δύο λαχνούς, L^1 όμοιο με πριν, και L^3 τέτοιο ώστε

$$L^3 = [(1 - p_3, y_2), (p_3, x)]$$

τότε η επιλογή μεταξύ L^1 και L^3 είναι ανεξάρτητη από τα y_3 και x.

Αξίωμα 5.

Έστω λαχνός L_1 που έχει ως αποτελέσματα άλλους λαχνούς, τους L^1 και L^2 με πιθανότητες q^1 και q^2 αντίστοιχα. (βέβαια q^2 = 1-q^1). Τα αποτελέσματα των λαχνών L^1 και L^2 είναι τα y_i. Οπότε

$$L_1 = [\{q^j, L^j\}\, j = 1, 2]$$

ενώ

$$L^j = [\{p_i^j , y_i\} i = 1,\dots,4] \quad \mathrm{j} = 1,2$$

θα εξετάσουμε το πρόβλημα της επιλογής μεταξύ του L_1 και ενός λαχνού

$$L_2 = [\{p_i , y_i\} i = 1,\dots,4]$$

Αναπτύσσοντας το L_1 με τρόπο ώστε να εκφράζεται ως συνάρτηση των τελικών αποτελεσμάτων y_i και μόνο, έχουμε

$$L_1 = [(\{q^1 p_1^1 + q^2 p_1^2], y_1), (\{q^1 p_2^1 + q^2 p_2^2], y_2), (\{q^1 p_3^1 + q^2 p_3^2], y_3), (\{q^1 p_4^1 + q^2 p_4^2], y_4)]$$

οπότε $L_1 \sim L_2$ αν

$$p_i = \sum_{j=1}^{2} p_i^j q^j \quad \text{για i = 1,...,4.}$$

Αξίωμα 6.

Αν

$$L^1 = [(p, y_1), (1-p), y_4]$$

και

$$L^2 = [(q, y_1), (1-q), y_4]$$

τότε $L^1 \succsim L^2$ αν και μόνο αν $p \geq q$.

Πριν εξετάσουμε πιο προσεκτικά τα αξιώματα αυτά, θα παρουσιάσουμε το κυριότερο αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού, δηλαδή την υπόθεση της προσδοκώμενης χρησιμότητας (expected utility hypothesis).

Η προσδοκώμενη χρησιμότητα ενός λαχνού, L, που οδηγεί σε αποτελέσματα y_i με πιθανότητες p_i είναι

$$U(L) = \sum_{i=1}^{4} p_i u_i \ .$$

Ο προτιμότερος λαχνός είναι αυτός με τη μεγαλύτερη προσδοκώμενη χρησιμότητα.

Η απόδειξη είναι απλούστατη και συνίσταται στο να βρει κανείς για κάθε λαχνό L^j ένα λαχνό που είναι εξ ίσου προτιμητέος που να έχει ως αποτελέσματα μόνο τα y_1 και y_4. Η σύγκριση μεταξύ λαχνών τότε απλοποιείται στη σύγκριση μεταξύ των σταθμιστών που αντιστοιχούν στο y_1. Σύμφωνα με το αξίωμα 6, επιλέγεται ο λαχνός που έχει το μεγαλύτερο σταθμιστή του y_1.

Από το αξίωμα 3 ξέρουμε ότι ένα αποτέλεσμα y_i είναι αδιάφορο ως προς το λαχνό αναφοράς που του αντιστοιχεί,

$L_i^* \equiv [u_i y_1; (1-u_i) y_4]$.   Έτσι αν στον λαχνό

$$L^1 = [\{p_i, y_i\} i = 1, \ldots, 4]$$

αντικαταστήσουμε τα y_i με τους αντίστοιχους λαχνούς αναφοράς έχουμε τον ισοδύναμο λαχνό

$$L^{1*} = [\{p_i, L_i^*\} i = 1, \ldots, 4]$$

Σύμφωνα με το αξίωμα 4, οι λαχνοί L^1 και L^{1*} πρέπει να είναι ισοδύναμοι στις προτιμήσεις του φορέα αποφάσεων. Αναπτύσσοντας το L^{1*} ακολουθώντας τη διαδικασία που αναπτύχθηκε στην παρουσίαση του αξιώματος 5, φθάνουμε στην ισοδύναμη μορφή που είναι συνάρτηση αποκλειστικά των αποτελεσμάτων y1 και y_4 .

$$L^{1*} = [(\{p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3 + p_4u_4], y_1),$$
$$(p_1(1-u_1) + p_2(1-u_2) + p_3(1-u_3) + p_4(1-u_4)], y_4)] =$$
$$[(p, y_1, (1-p), y_4]$$

όπου $p = \sum_{i=1}^{4} p_i u_i$

οπότε

αν $p = \sum_{i=1}^{4} p_i u_i$

Έστω ότι υπάρχει ένας δεύτερος λαχνός L2 με τα ίδια δυνητικά αποτελέσματα με τον L1 αλλά με διαφορετική πιθανοκατανομή.

$$L^2 = [\{q_i , y_i\} i = 1, \ldots, 4]$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που εφαρμόσαμε πιο πριν,

$$L^2 \sim [(q, y_1), (1-q, y_4)] \quad \text{αν} \quad q = \sum_{i=1}^{4} q_i u_i$$

Τέλος, με τη βοήθεια του αξιώματος 6 έχουμε ότι

$L^1 \succsim L^2$ αν και μόνο αν $p \geq q$.

Ο δείκτης u_i αποτελεί σταθμιστή που ο φορέας αποφάσεων αντιστοιχεί με κάθε αποτέλεσμα y_i με τρόπο ώστε για κάθε αποτέλεσμα y_i να υπάρχει μόνο μία αξία u_i. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μία συνάρτηση u η οποία να μετατρέπει κάθε y σε ένα δείκτη (που κινείται μεταξύ 0 και 1), ο οποίος εκφράζει την αξία που έχει για το φορέα αποφάσεων ένα χρηματικό ποσό y. Η αξία που έχει για το φορέα αποφάσεων ένα ποσό y αποκαλείται η εκ των υστέρων (ex post) χρησιμότητα του y. Η συνάρτηση που μετατρέπει τα y σε u μπορεί να γραφεί u(y) έτσι ώστε $u_i = u(y_i)$, και αποκαλείται η εκ των προτέρω (ex ante) συνάρτηση χρησιμότητας των αποτελεσμάτων y_i και των αντιστοίχων πιθανοτήτων. Στην περίπτωση που εξετάζουμε όπου υπάρχουν μόνο τέσσερα δυνατά αποτελέσματα, η προσδοκώμενη χρησιμότητα του λαχνού L^1 είναι

$$U(L^1) = \sum_{i=1}^{4} p_i u(y_i) = p$$

ενώ αυτή του λαχνού L^2 είναι

$$U(L^2) = \sum_{i=1}^{4} q_i u(y_i) = q$$

Με το τρόπο αυτό η ιεράρχηση των λαχνών επιτυγχάνεται μέσα από την ιεράρχηση των προσδοκώμενων χρησιμοτήτων αφού

$L^1 \underset{\sim}{\succ} L^2$ αν και μόνο αν $p \geq q$·

και

$p \geq q$ σημαίνει ότι $U(L^1) \underset{\sim}{\succ} U(L^2)$

Αυτή είναι η ουσία της υποθέσεως της προσδοκώμενης χρησιμότητας. Τα συμπεράσματα αυτά μπορούν να εξαχθούν για οποιοδήποτε αριθμό αποτελεσμάτων και οποιοδήποτε αριθμό λαχνών. Πριν σχολιάσουμε τα συμπεράσματα του τμήματος αυτού αναλυτικότερα, θα αναπτύξουμε ένα παράδειγμα της υπόθεσης προσδοκώμενης χρησιμότητας.

2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αρχίσαμε το κεφάλαιο αυτό αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα επιλογής μεταξύ δύο λαχνών (2.1) και (2.2). Στο τμήμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το λογισμό της προσδοκώμενης χρησιμότητας για την επίλυση του προβλήματος αυτού. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρία δυνατά αποτελέσματα.

$$y_1 = 50 \quad y_2 = 25 \quad y_3 = 10$$

εξετάζοντας αρχικά το λαχνό L^1

$$L^1 = [(0,2;50),(0,6;25),(0,2;10)]$$

παίρνοντας κάθε y_i με τη σειρά υπολογίζουμε τον αντίστοιχο λαχνό αναφοράς L^*_i.

$$L_1^* = [u_1 50,(1-u_1)10] \sim 50 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{u}_1 = 1$$

$$L_3^* = [u_3 50,(1-u_3)10] \sim 10 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{u}_3 = 0$$

τα αποτελέσματα αυτά δίδονται εξ ορισμού, αλλά τι γίνεται με το u_2 ?

$$L_2^* = [u_2 50,(1-u_2)10] \sim 25$$

Δεν υπάρχει απόλυτος τρόπος απόδοσης αξίας ισοδύναμης με το λαχνό αυτό, αφού το ζητούμενο είναι η έκφραση της υποκειμενικής αξίας που έχει το αντίστοιχο χρηματικό ποσό στο φορέα αποφάσεων. Οπότε η απάντηση διαφέρει από άνθρωπο σε άνθρωπο. Για μένα η αξία αυτή θα ήταν 0,6. Οπότε

$L_2^* = [u_2 50, (1-u_2)10] \sim 25$ σημαίνει ***<u>(για μένα)</u>*** u_2 = 0,6.

υποκαθιστώντας τα αποτελέσματα αυτά στην έκφραση για το L^1

L^{1*} = [(0,2;50),(0,6;[0,6(50)+0,4(10)]),(0,2;(10))] =

= [(0,56:50),(0,44:10)] οπότε p = 0,56

Με ανάλογο τρόπο γίνεται η μετατροπή του L^2 από

L^2 = [(0,3;50),(0,4;25),(0,3;10)]

σε

L^{2*} = [(0,3;(50)),(0,4;[0,6(50)+0,4(10)],(0,3,(10)]

= [(0,54;50),(0,46;10)] οπότε q = 0,54

σύμφωνα με την υπόθεση της προσδοκώμενης χρησιμότητας έχουμε ότι

$$L^1 \succsim L^2 \quad \text{if} \quad L^{1*} \succsim L^{2*}$$

και

$$L^{1*} \underset{\sim}{\succ} L^{2*} \quad \text{if} \quad \mathrm{p} \geq \mathrm{q} \quad \text{or} \quad \mathrm{U}(\mathrm{L}^1) \geq U(L^2)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$U(L^1) \equiv p = \sum_{i=1}^{3} p_i u_i = \sum_{i=1}^{3} p_i u(y_i) = 0,56$$

και

$$U(L^2) \equiv q = \sum_{i=1}^{3} q_i u_i = \sum_{i=1}^{3} q_i u(y_i) = 0,54$$

Φαίνεται ότι προτιμώ το λαχνό L^1 από τον L^2, αφού ο πρώτος μου δίνει ψηλότερη χρησιμότητα από το δεύτερο. Αν όμως είχα επιλέξει το u_2 ως 0,5, τότε οι δύο λαχνοί θα μου ήταν αδιάφοροι αφού τότε, $U(L^1) = U(L^2) = 0,5$. Αν είχα επιλέξει u_2 ίσο με 0,4 οι προτιμήσεις μου θα ανατρέποντο αφού στην περίπτωση αυτή $U(L^1) < U(L^2)$.

Η επιλογή του u_2 είναι καθοριστική στην επιλογή μεταξύ λαχνών. Βλέπουμε επίσης ότι με την επιλογή αυτή ουσιαστικά εκφράζω προτίμηση μεταξύ των μεθόδων επιλογής κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας που εξετάσαμε πιο πριν. Επιλέγοντας χαμηλές τιμές για το u_2 έτεινα προς την άποψη ότι ο L^2 είναι προτιμότερος διότι ενέχει μεγαλύτερη ελπίδα να αποκτήσω

50 μονάδες. Αντίθετα επιλέγοντας ψηλές τιμές για το u_2 θα έτεινα προς την άποψη ότι ο L^2 είναι λιγότερο ελκυστικός διότι ενέχει μεγάλη ελπίδα να αποκτήσω μόνο 10 μονάδες. Κατά συνέπεια ένα αρκετά πολύπλοκο πρόβλημα μπορεί να λυθεί αρκετά εύκολα αρκεί να τηρούνται τα έξι αξιώματα που εκθέσαμε πιο πάνω.

Ως δεύτερο παράδειγμα θα εξετάσουμε την επιλογή μεταξύ των λαχνών στο παράδειγμα (2.3) και (2.4). Τα τρία δυνατά αποτελέσματα είναι

$$y_1 = 50 \quad y_2 = 30 \quad y_3 = 10$$

και μπορούμε να γράψουμε την (3.3) και την (3.4) ως

$$L^3 = [(0,5;50),(0,0;30),(0,5;10)]$$

$$L^4 = [(0,0;50),(1,0;30),(0,0;10)]$$

Η επιλογή εδώ είναι μεταξύ της βεβαιότητας να κερδίσει κανείς 30 μονάδες και ενός δίκαιου λαχνού με προσδοκώμενη απόδοση ίση με 30.

Όπως πριν θέτουμε u_1 = u(50) =1 και u_3 = u(10) = 0. Ο λαχνός αναφοράς για το y_2 είναι

$$L_2^* = [u_2 50, (1-u_2)10] \sim 30$$

Όσο με αφορά θα ήθελα να έχω περισσότερο από 50 τις εκατό πιθανότητες να κερδίσω 50 μονάδες, ας πούμε 0,7. Οπότε,

L^{3*} = [(0,5;50),(0,0;[0,7(50)+0,3(10)]),(0,5;(10))]

L^{4*} = [(0,0;50),(1,0;[0,7(50);0,3(10)]),(0,0;(10))]

που δίνουν

$$U(L^3) \equiv p = \sum_{i=1}^{3} p_i u(y_i) = 0,5$$

και

$$U(L^4) \equiv q = \sum_{i=1}^{3} q_i u(y_i) = 0,7$$

Οπότε προτιμώ τη βεβαιότητα να κερδίσω 30 από το δίκαιο στοίχημα με προσδοκώμενη απόδοση 30. Φαίνεται ότι δε μου αρέσει η αβεβαιότητα. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα αυτό εκφράζεται από την επιλογή μου σχετικά με το u_2 και, όπως πριν αλλαγές στο επίπεδο του u_2 θα οδηγήσουν σε διαφορετικές προτιμήσεις μεταξύ λαχνών.

2.4 ΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Αναλογιστείτε, αρχικά, την ύστερη (ex post) συνάρτηση χρησιμότητας u(y), η οποία αντιστοιχεί σε κάθε αποτέλεσμα y ένα αριθμό u εκφράζοντας έτσι τη χρησιμότητα του κάθε χρηματικού ποσού. Σε πρώτη προσέγγιση, φαίνεται να έχουμε ανακαλύψει ένα μέτρο απόλυτης χρησιμότητας. Η θεωρία που αναπτύξαμε εξαρτάται από τις συγκεκριμένες τιμές που παίρνει ο ύστερος δείκτης χρησιμότητας. Δεν αρκεί να μπορούμε να εκφράσουμε την προτίμηση μας μεταξύ δύο αποτελεσμάτων y_i και y_j, πρέπει να προσδιορίσουμε κατά πόσες μονάδες χρησιμότητας προτιμούμε το ένα αποτέλεσμα από το άλλο. Ευτυχώς αυτό που έχει σημασία για τη θεωρία προσδοκώμενης χρησιμότητας δεν είναι η ύπαρξη ενός απολύτου μέτρου χρησιμότητας (δηλαδή, δεν είναι απαραίτητο να εκφράσουμε απόλυτα επίπεδα ικανοποίησης) αλλά η δυνατότητα διαμέτρησης (calibration) ενός εύρους τιμών χρησιμότητας έτσι ώστε να γίνεται δυνατή η σύγκριση ενός αποτελέσματος σχετικά με όλα τα υπόλοιπα.

Ορίζουμε τα όρια των τιμών χρησιμότητας που αντιστοιχούν σε ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων έτσι ώστε το μεγαλύτερο να έχει δείκτη χρησιμότητας ίσο με ένα ενώ ο δείκτης του μικρότερου να είναι ίσος με μηδέν. Στο πρώτο παράδειγμα του προηγουμένου τμήματος, η επιλογή μεταξύ των λαχνών L^1 και L^2 κατέστη δυνατή εν μέρη επειδή αποδώσαμε τιμή μηδέν στο δείκτη χρησιμότητας στο αποτέλεσμα 10. Πρόθεση μας δεν ήταν να πούμε ότι δεν απολαμβάνουμε καθόλου χρησιμότητα όταν κερδίζουμε 10 χρηματικές μονάδες. Αυτό που έχει σημασία στην επιλογή μεταξύ λαχνών δεν είναι οι απόλυτες τιμές χρησιμότητας, αλλά η σχετική θέση των δεικτών στο διάστημα (0, 1). Το διάστημα αυτό επιλέχθηκε με τρόπο ώστε ο λαχνός αναφοράς να μπορεί να ερμηνευτεί ως σταθμιστής που βασίζεται σε υποκειμενική εκτίμηση πιθανοτήτων, οπότε η διαμέτρηση γίνεται απλή υπόθεση. Αυτό όμως που μετράει στην επιλογή μεταξύ λαχνών είναι η ικανότητα κατάταξης πρότερων (ex ante) χρησιμοτήτων ή προσδοκώμενων χρησιμοτήτων U(L). Αν επιλέξουμε για την κατασκευή του μέτρου χρησιμότητας κάποιο άλλο διάστημα στη θέση του (0, 1), η τελική κατάταξη των δεικτών προσδοκώμενης χρησιμότητας θα παραμείνει αναλλοίωτη αφού η σχετική θέση των δεικτών στο διάστημα αυτό θα παραμείνει σταθερή.

Για παράδειγμα, όταν επιλέξαμε μεταξύ των λαχνών L^1 και L^2 στο τμήμα 2.3, οι δείκτες χρησιμότητας πήραν τις τιμές 1 (για $y_1 = 50$), 0,6 (για $y_2 = 25$) και 0 (για $y_3 = 10$). Αυτό όμως που είχε σημασία δεν ήταν ότι $u(y_2) = 0{,}6$, αλλά ότι $u(y_2) = 0{,}6$ δεδομένου ότι $u(y_1) = 1$ και $u(y_3) = 0$. Αν η σχετική απόσταση του $u(y_2)$ από το μέγιστο και το ελάχιστο των δεικτών χρησιμότητας διατηρηθεί, τότε η τελική κατάταξη των λαχνών σύμφωνα με την προσδοκώμενη χρησιμότητα παραμένει αναλλοίωτη, όποιο διάστημα και να χρησιμοποιηθεί. Η κλίμακα χρησιμότητας μπορεί να αλλάξει αρκεί ο λόγος

$$\frac{u(25)-u(10)}{u(50)-u(25)} \qquad 2.6$$

να παραμείνει σταθερός. Έτσι η τιμή του $u(y_i)$ μπορεί να αλλάξει αρκεί αυτό να γίνει με τρόπο ώστε ο λόγος 2.6 να παραμείνει αμετάβλητος.

Ο λόγος 2.6 παίρνει την τιμή

$$\frac{0,6-0,0}{1,0-0,6}=\frac{0,6}{0,4}=1,5 \qquad 2.7$$

που σημαίνει ότι μπορούμε να αλλάξουμε την κλίμακα χρησιμότητας αρκεί η διαφορά μεταξύ u(25) και u(10) να είναι 1,5 φορές η διαφορά μεταξύ u(50) και u(25). Αν τηρηθεί η αναλογία αυτή η κατάταξη των προτιμήσεων που γίνεται με βάση την προσδοκώμενη χρησιμότητα παραμένει αμετάβλητη.

Για παράδειγμα ας αλλάξουμε την κλίμακα των τιμών των δεικτών χρησιμότητας από (0, 1) σε (6, 7), προσθέτοντας 6 στο ψηλότερο και στο χαμηλότερο δείκτη. Ο λόγος 3.6 θα παραμείνει σταθερός μοναχά αν επίσης προσθέσουμε 6 και στον ενδιάμεσο δείκτη χρησιμότητας, οπότε

$$\frac{6,6-6,0}{7,0-6,6}=1,5$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αν διπλασιάσουμε το διάστημα (0, 1) σε (0, 2), ο λόγος 3.6 μένει αμετάβλητος αν διπλασιάσουμε παράλληλα και την τιμή του ενδιάμεσου δείκτη από 0,6 σε 1,2. Για την ακρίβεια για οποιαδήποτε γραμμική μεταβολή των τιμών του u ο λόγος 2.6 παραμένει σταθερός. Έτσι αν ορίσουμε ένα νέο μέτρο ύστερης χρησιμότητας ως

$$v(y_i) = a + bu(y_i) \quad \text{για όλα τα } i \qquad 2.8$$

οπότε η συνάρτηση v αποτελεί γραμμική μεταβολή της u, τότε η χρήση της v θα οδηγήσει στις ίδιες επιλογές με αυτές που θα γινόντουσαν αν χρησιμοποιείτο η u. Ας υποθέσουμε ότι a = 6 και b = 2, τότε η προσδοκώμενη χρησιμότητα του L^1 δίδεται από

$$\begin{aligned} V(L^1) &= 0,2v(y_1) + 0,6v(y_2) + 0,2v(y_3) \\ &= 0,2[6 + 2u(50)] + [6 + 2u(25)] + 0,2[6 + 2u(10)] \\ &= 0,2[8] + 0,6[7,2] + 0,2[6] \\ &= 7,12 \end{aligned}$$

ενώ για το L^2 έχουμε

$$V(L^2) = 0,3v(y_1) + 0,4v(y_2) + 0,3v(y_3)$$
$$= 7,08$$

Η συνάρτηση ύστερης χρησιμότητας v οδηγεί στην ίδια κατάταξη προσδοκώμενης χρησιμότητας με τη συνάρτηση u. Έτσι η συνάρτηση ύστερης χρησιμότητας δεν είναι μοναδική, πράγμα που θα συνέβαινε στην περίπτωση το μέτρο χρησιμότητας ήταν απόλυτο. Από την άλλη μεριά το μέτρο που αναπτύχθηκε δεν είναι και απόλυτα αυθαίρετο. Έστω η μη γραμμική συνάρτηση

$$v(y_i) = [u(y_i)]^2 \qquad \text{για κάθε } i$$

στη περίπτωση αυτή η κατάταξη χρησιμοτήτων μεταβάλλεται αφού

$$V(L^1) = 0,2[u(50)]^2 + 0,6[u(25)]^2 + 0,2[u(10)]^2$$
$$= 0,416$$

ενώ

$$V(L^2) = 0,3[u(50)]^2 + 0,4[u(25)]^2 + 0,3[u(10)]^2$$
$$= 0,444$$

με αποτέλεσμα το L^2 να έχει μεγαλύτερο δείκτη χρησιμότητας. Είναι λοιπόν δυνατό τοι αυθαίρετες μεταβολές της u να οδηγήσουν σε ανατροπή της κατάταξης των δεικτών χρησιμότητας διότι δε διατηρούν του λόγους μεταξύ των διαφορών σταθερούς. Μόνο οι γραμμικές μεταβολές της u διατηρούν την κατάταξη των δεικτών χρησιμότητας αναλλοίωτη.

Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε σε ένα τρόπο μέτρησης παραπλήσιο με αυτό που χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση της ατμοσφαιρικής θερμοκρασίας. Δεν υπάρχει λογική στο να πούμε ότι 20^0 C είναι δύο φορές πιο ζέστη από 10^0 C αφού μία γραμμική μεταβολή, F = 32 + (9/5)C, μας δίνει την κλίμακα Farenheit, σύμφωνα με την οποία η ανώτερη θερμοκρασία (68^0 F είναι 1,36 φορές η χαμηλότερη (50^0 F). Κατ΄αναλογία δεν κάνει νόημα να πούμε ότι κάποιο αποτέλεσμα μας δίνει διπλάσια ικανοποίηση από κάποιο άλλο.

Η κλίμακα της ύστερης χρησιμότητας επιβάλει μία συγκεκριμένη κατάταξη των δεικτών προσδοκώμενης χρησιμότητας, που προσδιορίζει την τελική επιλογή μας. Η κατάταξη και όχι η απόλυτη τιμή των δεικτών προσδοκώμενης χρησιμότητας είναι αυτή που είναι καθοριστική στην επιλογή κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας.

2.5 ΑΔΥΝΑΜΙΕΣ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Οι προβλέψεις της θεωρίας προσδοκώμενης χρησιμότητας φαίνεται ότι συνάδουν με την κοινή λογική και ότι οδηγούν σε λογικοφανείς επιλογές μεταξύ λαχνών. Φαίνεται ότι παρεκάμφησαν τα προβλήματα του τμήματος 3.1 και βρέθηκε τρόπος με τον οποίο μπορούμε να συμπεριλάβουμε στην διαδικασία αποφάσεων τόσο τις πιθανότητες υλοποίησης γεγονότων όσο και τη διάθεση μας απέναντι σε διαφορετικούς λαχνούς.

Σε κάθε περίπτωση όμως η υπόθεση αυτή στηρίζεται στα αξιώματα που αναπτύχθηκαν και πρέπει να είμαστε έτοιμοι να αμφισβητήσουμε την εγκυρότητα των αξιωμάτων αν οδηγούν σε περίεργα αποτελέσματα ή ακόμη αν ένας σημαντικός αριθμός φαινομενικά λογικών ανθρώπων κάνουν επιλογές που αντιστρατεύονται την υπόθεση προσδοκώμενης χρησιμότητας. Πριν παραθέσουμε ορισμένα παραδείγματα, είναι εύλογο να περιγράψουμε τις γενικές συνθήκες κάτω από τις οποίες γίνονται επιλογές που είναι αντίθετες με τις προβλέψεις της θεωρίας.

Πρώτο, τα άκρα της κατανομής των δυνητικών αποτελεσμάτων μπορεί να επηρεάζουν τη συμπεριφορά του φορέα αποφάσεων. Αν το χειρότερο αποτέλεσμα είναι αρκούντως αποτρόπαιο για τον αποφασίζοντα, τότε είναι πιθανό να μην είναι δυνατή η εκπόνηση λαχνών αναφοράς για τα ενδιάμεσα δυνητικά αποτελέσματα. Αν υπάρχει δυστοκία στην απόδοση σταθμιστή στο αποτέλεσμα y_4 του αξιώματος 3, για οποιοδήποτε y_i θα έχουμε $u_1 = 1$, $u_2 = 1$,

u_3 = 1 και, u_4 = 0, πράγμα που δυσκολεύει την επιλογή μεταξύ λαχνών που περικλείουν το y_4 ως αποτέλεσμα. (γιατί ?)

Δεύτερο, αντίθετα με το αξίωμα 4, είναι δυνατό οι προτιμήσεις να επηρεάζονται από τον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται οι λαχνοί. Το αξίωμα 4 είναι γνωστό και ως αξίωμα της ανεξαρτησίας, και η παράβαση του οδηγεί σε παράδοξη ή με συνεπή συμπεριφορά. Υπάρχουν πολλά τέτοια παραδείγματα, το πιο γνωστό από αυτά είναι το παράδοξο του Allais (Allais Paradox). Το παράδοξο αυτό έχει επιβεβαιωθεί από τα αποτελέσματα πολλών πειραμάτων, ένα από τα οποία βρίσκεται στο βιβλίο των Kahneman και Tversky (1979).

Αναλογιστείτε μία επιλογή μεταξύ λαχνών L^1 και L^2

L^1 = [(0,33;2500),(0,66;2400),(0,01;0)]

L^2 = [(1; 2400)]

Τα αποτελέσματα μπορεί να είναι χρηματικά ποσά. Οι περισσότεροι ερωτηθέντες επέλεξαν το λαχνό L^2 πράγμα που σημαίνει

$U(L^2) > U(L^1)$

ή $u(2400) > 0{,}33u(2500) + 0{,}66u(2400)$

ή $0{,}34u(2400) > 0{,}33u(2500)$

Αναλογιστείτε τώρα μία επιλογή μεταξύ των λαχνών L^3 και L^4

L^3 = [(0,33;2500),(0,67:0)]

L^4 = [(0,34;2400),(0,66;0)]

οι περισσότεροι των ερωτηθέντων επέλεξαν το L^3 το οποίο σημαίνει ότι

$U(L^3) > U(L^4)$

ή $0,33u(2500) > 0,34u(2400)$

που είναι ασυμβίβαστο με το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Αν οι αποφάσεις γινόντουσαν με μόνο κριτήριο την υπόθεση της προσδοκώμενης χρησιμότητας, τότε θα ήταν αδύνατο να επιλεγεί το L^3 στη δεύτερη περίπτωση. Το συμπέρασμα από αυτό και άλλα πειράματα είναι ότι το πλαίσιο στο οποίο τίθεται κάποια επιλογή μπορεί να επηρεάσει την κρίση και τις προτιμήσεις των φορέων αποφάσεων. Αντίθετα η θεωρία προσδοκώμενης χρησιμότητας βασίζεται στην υπόθεση ανεξαρτησίας, δηλαδή θεωρεί ότι το πλαίσιο στο οποίο τίθεται το πρόβλημα επιλογής δεν επηρεάζει τις προτιμήσεις.

Στις περισσότερες των περιπτώσεων, η θεωρία προσδοκώμενης χρησιμότητας είναι ικανοποιητικός τρόπος επιλογής κάτω από συνθήκες επιχειρηματικού κινδύνου, αν και μερικές φορές η διαίσθηση μας μπορεί να εναντιώνεται στα συμπεράσματα της θεωρίας αυτής.

2.6 ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΤΑΣΗ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΟΝ ΚΙΝΔΥΝΟ

Στο δεύτερο παράδειγμα του τμήματος 2.3 εξέφρασα προτίμηση (μέσα από την επιλογή των δεικτών χρησιμότητας) στο να κερδίσω με σιγουριά 30 μονάδες από ένα δίκαιο λαχνό που έχει προσδοκώμενη απόδοση 30. Την προτίμηση μου αυτή την απέδωσα στο γεγονός ότι δε μου αρέσει να αναλαμβάνω κίνδυνο. Με άλλα λόγια έχω αποστροφή στον κίνδυνο. Πιστεύω ότι οι περισσότεροι άνθρωποι θα είχαν την ίδια στάση απέναντι στον κίνδυνο, αλλά τούτο δεν είναι απαραίτητο για τη θεωρία της προσδοκώμενης χρησιμότητας, και θα μπορούσα να είχα επιλέξει την τιμή του δείκτη u_2 με τρόπο ώστε να απεικόνιζα την προτίμηση μου στο γεγονός ότι θα μπορούσα με κάποιες πιθανότητες να κερδίσω 50 μονάδες.

Όταν έπρεπε να διαλέξω μεταξύ του λαχνού

$L^3 = [(0,5;50),(0,5;10)]$

και

$L^4 = [(1,0;30)]$

διαφάνηκε ότι για μένα

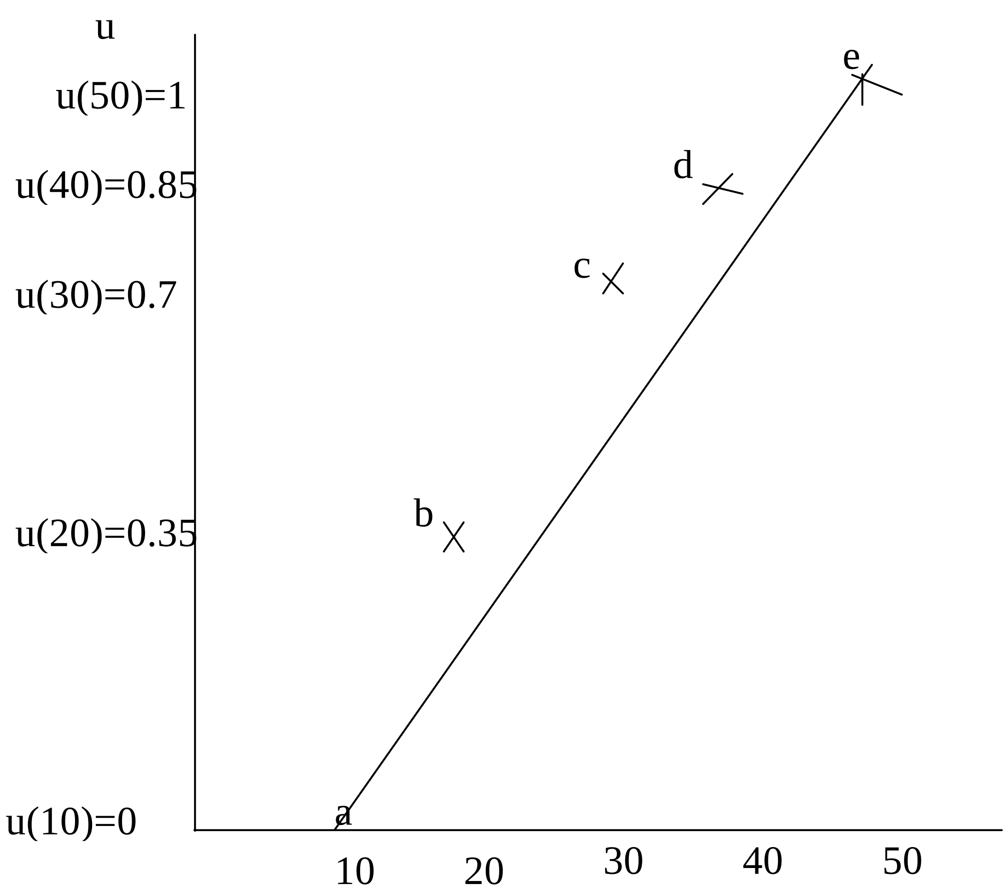
$U(L^4) > U(L^3)$ έτσι ώστε

$u(30) > 0,5u(50) + 0,5u(10)$.

Με άλλα λόγια η χρησιμότητα της προσδοκώμενης αξίας του L^3 ,u(30) = 0,70, είναι μεγαλύτερη από την προσδοκώμενη χρησιμότητα του L^3. Τούτο απεικονίζεται στο σχήμα 2.1.

Η συνάρτηση χρησιμότητας αρχικά απαρτίζεται από τρία σημεία τα a, b ,c που αντιστοιχούν στη χρησιμότητα u(10), u(30) και, u(50). Έστω ότι υπάρχει η δυνατότητα επιλογής $L^5 = [(1,0;40)]$.

ΣΧΗΜΑ 2.1



2.1

Είναι φανερό ότι το L^5 θα προτιμηθεί του L^4. Συγκρίνουμε τώρα το L^5 με ένα λαχνό που έχει ως αποτελέσματα το 10 και το 50 και έχει την ίδια προσδοκώμενη αξία με το L^5. Για να έχει προσδοκώμενη αξία ίση με 40 ένας λαχνός πρέπει να έχει την ακόλουθη μορφή

L^6 = [(0,75;50),(0,25;10)]

Στο βαθμό που δεν είμαι διατεθειμένος να ανταλλάξω τη σιγουριά του να αποκτήσω 40 με ένα λαχνό που έχει προσδοκώμενη απόδοση 40, το u(40) πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 0,75, έστω 0,85. Τώρα έχουμε άλλο ένα σημείο στο σχήμα 2.1, το d, που αντιστοιχεί στη χρησιμότητα u(40), οπότε
$u(40) > 0{,}75u(50) + 0{,}25u(10)$.

Αν θέλαμε να συγκρίνουμε ένα λαχνό με αποτελέσματα 10 και 50 με το σίγουρο κέρδος 20 μονάδων, ο λαχνός αυτός θα έπρεπε να έχει τη μορφή

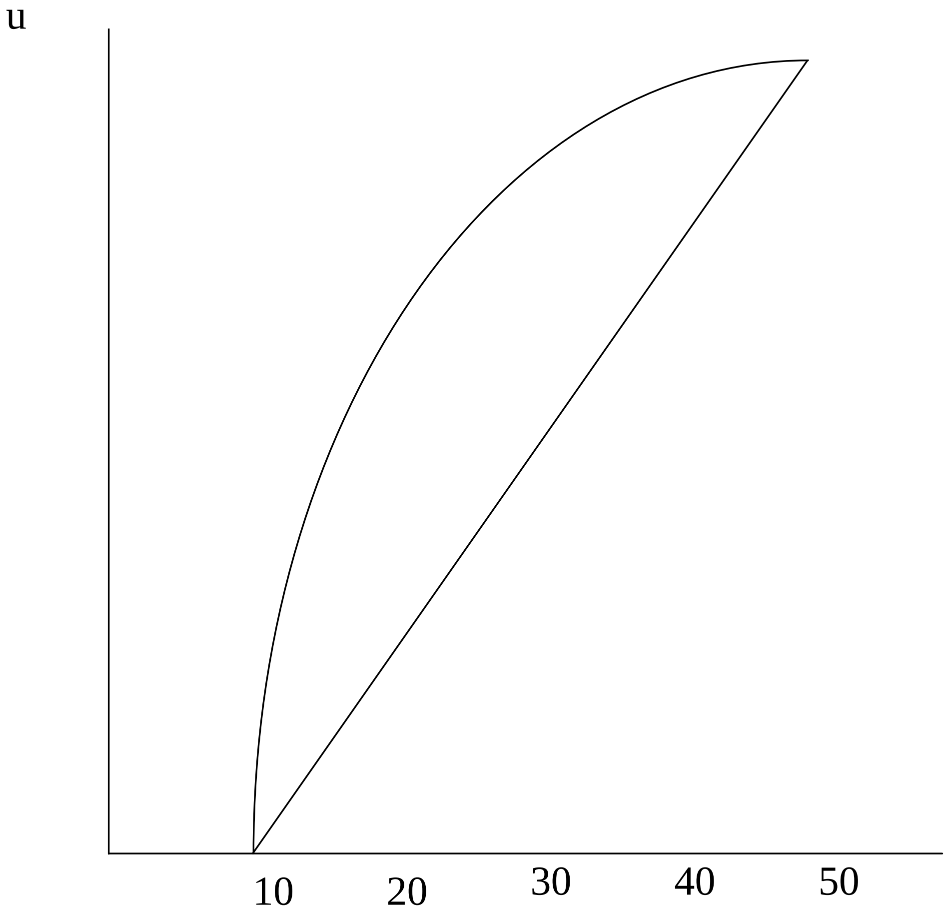
$L^7 = [(0{,}25;50),(0{,}75;10)]$

Το 20 είναι όμως μεγαλύτερο από το 10 που είναι το πιο πιθανό αποτέλεσμα του λαχνού. Δηλαδή οι προτιμήσεις μου είναι

$u(20) > 0{,}25u(50) + 0{,}75u(10)$

Αν υποθέσουμε ότι u(20) = 0,35, τότε αποκτάμε ένα πέμπτο σημείο στο σχήμα 2.1. Μπορούμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτή επιλέγοντας οποιαδήποτε χρηματική αξία και προσδιορίζοντας την αντίστοιχη χρησιμότητα. Η καμπύλη χρησιμότητας θα έπαιρνε τη μορφή του σχήματος 2.2.

ΣΧΗΜΑ 2.2



2.2

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε μοναχά συναρτήσεις χρησιμότητας u(y) που είναι συνεχείς και ορίζονται πάνω σε συγκεκριμένο τμήμα των τιμών του y. Το σημαντικό σημείο είναι όμως το σχήμα της καμπύλης u(y). Αν η καμπύλη είναι κυρτή τότε εκφράζει την αποστροφή προς τον κίνδυνο (risk aversion) του φορέα αποφάσεων. Σε όλο το μήκος της καμπύλης, η χρησιμότητα που αντλείται από μία συγκεκριμένη τιμή του y είναι ψηλότερη από τη χρησιμότητα που δίνει ένας λαχνός με προσδοκώμενη απόδοση ίση με την τιμή αυτή. Μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της ουδετερότητας προς τον κίνδυνο (risk neutrality) με ανάλογο τρόπο. Όταν η χρησιμότητα που αντλείται από κάποια τιμή του y είναι ίση με τη χρησιμότητα που δίνει ένας λαχνός με προσδοκώμενη απόδοση y, τότε μιλάμε για ουδετερότητα απέναντι στον κίνδυνο. Κατά συνέπεια η ροπή προς τον κίνδυνο (risk preference) αντιστοιχεί σε κοίλες συναρτήσεις χρησιμότητας.

Πριν προχωρήσουμε στην εκπόνηση της μαθηματικής έκφρασης των παραπάνω εννοιών, συνοψίζουμε τα αποτελέσματα του τμήματος αυτού.

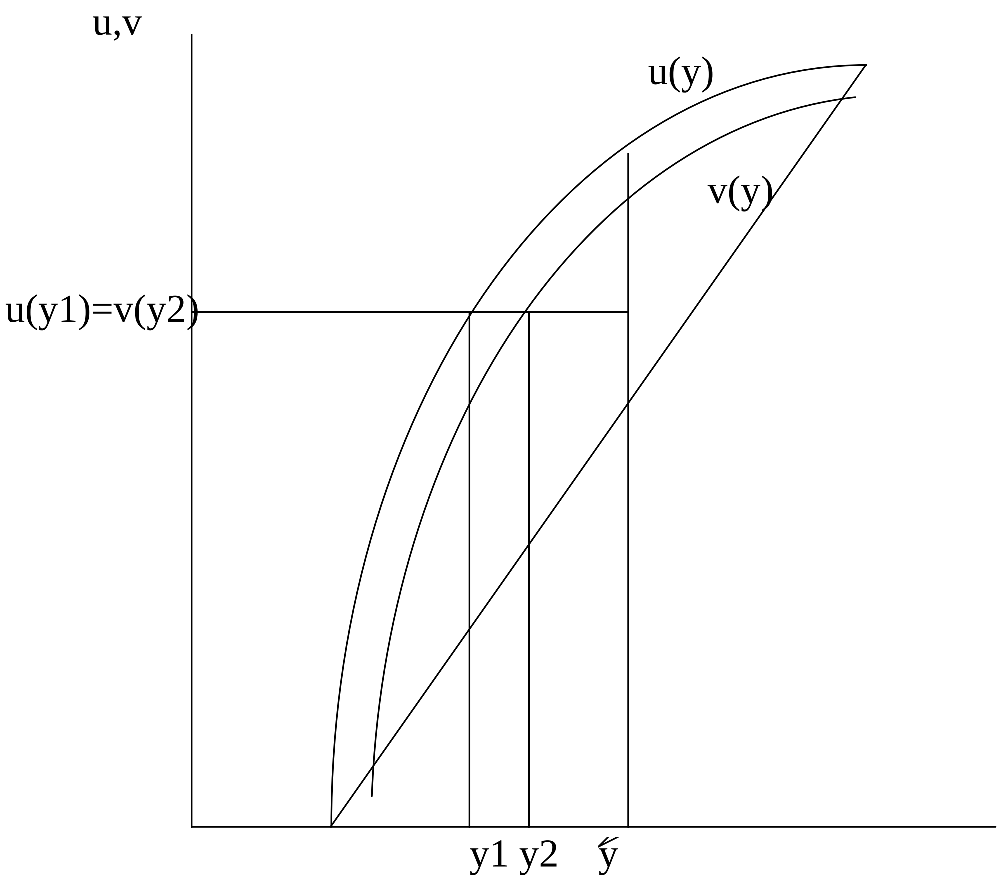
Ένας φορέας αποφάσεων εκφράζει αποστροφή/ουδετερότητα/ροπή προς τον κίνδυνο αν η χρησιμότητα της προσδοκώμενης απόδοσης ενός λαχνού είναι μεγαλύτερη/ίση/μικρότερη από την προσδοκώμενη χρησιμότητα του λαχνού.

Από τα παραπάνω μπορούμε να πάρουμε μία ιδέα ως προς τη μαθηματική έκφραση της στάσης απέναντι στον κίνδυνο. Είναι φανερό ότι εφ όσον οι συναρτήσεις χρησιμότητας είναι διπλά παραγωγήσιμες, η στάση απέναντι στον κίνδυνο προσδιορίζεται από τη δεύτερη παράγωγο. Αν και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ότι $u'(y) > 0$, στην περίπτωση της αποστροφής στον κίνδυνο έχουμε $u''(y) < 0$, στην ουδετερότητα $u''(y) = 0$, και στη ροπή προς τον κίνδυνο $u''(y) > 0$.

Θα θέλαμε όμως να προχωρήσουμε πιο πέρα από αυτή την απλή ταξινόμηση. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε αν έχει νόημα η ερώτηση, ποιος από δύο φορείς αποφάσεων που επιδεικνύουν αποστροφή στον κίνδυνο έχει τη μεγαλύτερη επιφυλακτικότητα απέναντι στο κίνδυνο? Η ερώτηση αυτή όχι μόνο έχει νόημα, αλλά επιδέχεται απλής απάντησης.

Στο σχήμα 2.3 βλέπουμε τις συναρτήσεις χρησιμότητας δύο φορέων αποφάσεων u και v.

Σχήμα 2.3



2.3

Είναι φανερό ότι η u(y) είναι πιο κυρτή από την v(y), οπότε διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας που ενέχει μεγαλύτερη αποστροφή στον κίνδυνο είναι η u(y). Μπορούμε να το δείξουμε αυτό με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω η προσδοκώμενη απόδοση ενός λαχνού $\bar{y}$

$$\bar{y} = py_{\max} + (1-p)y_{\min}$$

Για το φορέα αποφάσεων u η χρησιμότητα της προσδοκώμενης απόδοσης του λαχνού $u(\bar{y})$ είναι μεγαλύτερη από την προσδοκώμενη χρησιμότητα του λαχνού που είναι ίση με $pu(y_{\max}) + (1-p)u(y_{\min}) = u(y_1)$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει αποστροφή στον κίνδυνο. Ας υποθέσουμε ότι η προσδοκώμενη απόδοση του λαχνού διατηρείται σταθερή στο επίπεδο $\bar{y}$ αλλά το βέβαιο ποσό που είναι ισοδύναμο με το λαχνό μειώνεται κατά ένα μικρό ποσοστό ε, οπότε η χρησιμότητα μειώνεται αντίστοιχα από $u(\bar{y})$ σε $u(\bar{y}-\varepsilon)$. Αν το ε είναι αρκούντως μικρό συνεχίζει να ισχύει το γεγονός ότι προτιμάτε μία βέβαια απόδοση $\bar{y}$-ε από το λαχνό με προσδοκώμενη απόδοση $\bar{y}$, δηλαδή $u(\bar{y}-\varepsilon)$ > $u(y_1)$. Τούτο θα ισχύει μέχρις ότου το ποσό που αφαιρείται από το βέβαιο εισόδημα φτάσει σε ένα επίπεδο x_1 όπου $u(\bar{y}-x_1) = u(y_1)$. Οπότε το x_1 είναι το μεγαλύτερο πόσο που είναι διατεθειμένος ένας φορέας αποφάσεων να δεχτεί ως μείωση του βέβαιου εισοδήματος του και ακόμη να προτιμήσει το τελευταίο από το λαχνό. Το ποσό x_1 είναι γνωστό ως το πριμ κινδύνου (risk premium) για το συγκεκριμένο φορέα αποφάσεων. Είναι φανερό ότι $x_1 = \bar{y} - y_1$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάποιο φορέα αποφάσεων v. Το risk premium του ατόμου αυτού ικανοποιεί την συνθήκη $v(\ddot{y} - x_2) = v(y_2)$, και $x_2 = \bar{y} - y_2$. Οπότε έχουμε ότι

$$x_1 = \ddot{y} - y_1$$

και

$$x_2 = \bar{y} - y_2$$

Αλλά αφού $y_2 > y_1$, τότε $x_1 > x_2$. Το άτομο με τον ψηλότερο βαθμό αποστροφής στον κίνδυνο απαιτεί το ψηλότερο risk premium, κατά συνέπεια είναι διατεθειμένο να πληρώσει περισσότερο για να αποφύγει τον κίνδυνο, δηλαδή αποδίδει μεγαλύτερο βάρος στην βεβαιότητα του αποτελέσματος.

Εξετάζοντας τις συναρτήσεις u(y) και v(y), βλέπουμε ότι στο επίπεδο $\bar{y}$ το u' είναι περισσότερο αρνητικό από το v', κατά συνέπεια ο μεγαλύτερος βαθμός αποστροφής του κινδύνου συνδέεται με μεγαλύτερη κοιλότητα της συνάρτησης χρησιμότητας. Δυστυχώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης χρησιμότητας ως μέτρο της αποστροφής στον κίνδυνο. Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάποιος εκδηλώνει μεγαλύτερη αποστροφή στον κίνδυνο από τον v, επειδή

$$-u'' > -v''$$

Αν και η σχέση αυτή ισχύει π.χ. για το σχήμα 2.3, πρέπει να λάβουμε υπ' όψη το γεγονός ότι έχουμε την δυνατότητα να μετατρέψουμε την u και την v γραμμικά, αλλάζοντας την τιμή της δεύτερης παραγώγου κατά βούληση. Για παράδειγμα αν υιοθετήσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$u_1(y) = \alpha + \beta u(y) \qquad \beta > 1$$

τότε

$$u_1''(y) = \beta u''(y)$$

οπότε φαίνεται ότι το άτομο γίνεται β φορές πιο επιφυλακτικό στον κίνδυνο από πριν. Για να αντιμετωπίσουμε την δυσκολία αυτή λέμε ότι ο u επιδεικνύει μεγαλύτερη αποστροφή στον κίνδυνο από τον v αν $u'' < 0$ και $v'' < 0$ και

$$\frac{-u''(y)}{u'(y)} > \frac{-v''(y)}{v'(y)}$$

οπότε για οποιοδήποτε μετασχηματισμό όπως αυτόν που επιχειρήσαμε πιο πάνω

$$\frac{-\beta u''(y)}{\beta u'(y)} = \frac{-u''(y)}{u'(y)} > \frac{-v''(y)}{v'(y)}$$

έτσι το κριτήριο παραμένει αμετάβλητο για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό της συνάρτησης χρησιμότητας.

Ορισμός. Για ένα άτομο με συνάρτηση χρησιμότητας u(y) το μέτρο Arrow - Pratt απόλυτης αποστροφής κινδύνου (absolute risk aversion) δίδεται από

$$R_A = \frac{-u''(y)}{u'(y)}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, ένα άτομο επιδεικνύει αποστροφή στον κίνδυνο αν το R_A είναι θετικό, ουδετερότητα απέναντι στον κίνδυνο αν το R_A είναι μηδενικό και ροπή στον κίνδυνο αν το R_A είναι αρνητικό. Όσο μεγαλύτερο το R_A, τόσο περισσότερο ένα άτομο φυλάγεται από τον κίνδυνο.

Ένα σημαντικό μειονέκτημα που παρουσιάζει ο δείκτης R_A είναι ότι η τιμή του εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης του y. Για παράδειγμα αν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι

$$u(y) = \ln(y) \qquad \mathrm{y} > 0$$

έτσι ώστε

$$u'(y) = \frac{1}{y} > 0$$

και

$$u''(y) = \frac{-1}{y^2} < 0$$

οπότε

$$R_A(y) = \frac{1}{y}$$

Αν το y μετριέται σε χιλιάδες δραχμών τότε R_A=0,001, αν μετριέται σε δραχμές τότε R_A=1. Για να αποφύγουμε το πρόβλημα αυτό επιλέγουμε ένα μέτρο αποστροφής του κινδύνου που έχει τις ιδιότητες ελαστικότητας, τον δείκτη Arrow - Pratt σχετικής αποστροφής κινδύνου (relative risk aversion),

$$R_R(y) = -y\frac{u''(y)}{u'(y)} = yR_A$$

Ο δείκτης αυτός είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες του y.

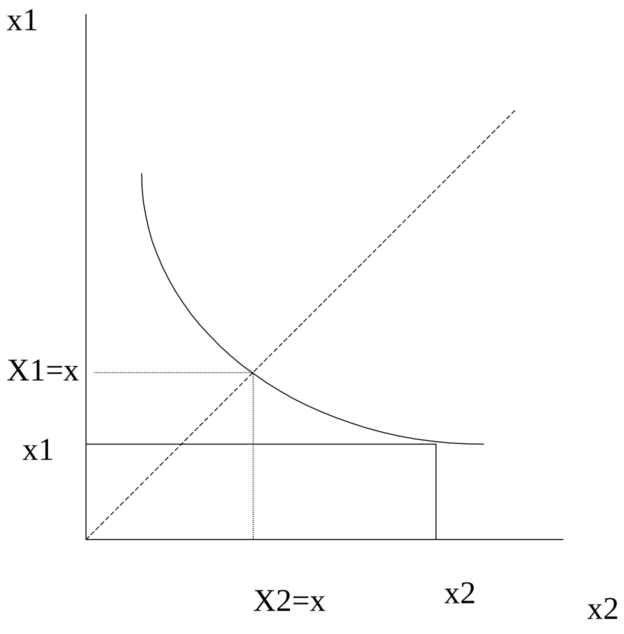
“Ο φορέας αποφάσεων που φοβάται τίμια στοιχήματα λιγότερο όσο μεγαλύτερος είναι ο πλούτος του, έχει συνάρτηση χρησιμότητας που επιδεικνύει φθίνουσα απόλυτο αποστροφή στον κίνδυνο.” Σχολιάστε.

2.7 Καμπύλες Αδιαφορίας

Η συνάρτηση χρησιμότητας που εκπονήθηκε στα προηγούμενα τμήματα εκφράζει κατ’ αρχή την χρησιμότητα που απολαμβάνει ένας φορέας αποφάσεων αφού ξέρει με βεβαιότητα το αποτέλεσμα του λαχνού ή της απόφασης που αναλαμβάνει. Έτσι, η συνάρτηση αυτή εκφράζει την εκ των υστέρων χρησιμότητα, δηλαδή την χρησιμότητα ενός αποτελέσματος αν αυτό υλοποιηθεί, ενώ η μορφή της αντανακλά την (πάγια) στάση του φορέα απέναντι στον κίνδυνο.

Η συνάρτηση που περιγράγηκε παραπάνω επιτρέπει τον υπολογισμό της προσδοκώμενης χρησιμότητας ενός λαχνού, αφού αυτή ορίζεται ως ο σταθμισμένος (με τις πιθανότητες) μέσος της χρησιμότητας των βέβαιων αποτελεσμάτων. Όπως με κάθε άλλη συνάρτηση χρησιμότητας είναι δυνατό να εκπονήσουμε ένα χάρτη καμπυλών αδιαφορίας που αντιστοιχεί στην συνάρτηση προσδοκώμενης χρησιμότητας.

Θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου υπάρχουν μόνο δύο ενδεχόμενες καταστάσεις. Στον κάθετο άξονα του διαγράμματος 2.4.1 μετράται η απόδοση ενός λαχνού αν επέλθει η κατάσταση 2, ενώ στον οριζόντιο άξονα η απόδοση στην κατάσταση 1. Οι πιθανότητες, π1 και π2, έλευσης των δύο καταστάσεων θεωρούνται δεδομένες και σταθερές. Η γραμμή που περνά από την τομή των αξόνων και σχηματίζει γωνία 45ο με τους άξονες, είναι ο τόπος των βέβαιων αποτελεσμάτων. Αφού οι συντεταγμένες κάθε σημείου πάνω στη γραμμή αυτή είναι ίσες, τότε όποια κατάσταση και αν υλοποιηθεί η απόδοση θα είναι η ίδια. Κατά συνέπεια δεν υπάρχει αβεβαιότητα όσο αφορά το αποτέλεσμα.



2.4.1

Η καμπύλη αδιαφορίας είναι ο τόπος των σημείων που δλινουν το ίδιο ύψος χρησιμότητας. Οπότε θέτουμε

$$E(u) = \pi_1 u(x_1) + \pi_2 u(x_2) = c$$

Παίρνοντας το διαφορικό της εξίσωσης αυτής έχουμε

$$\pi_1 \frac{du(x_1)}{dx_1} dx_1 + \pi_2 \frac{du(x_2)}{dx_2} dx_2 = 0$$

οπότε

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\pi_2 \dfrac{du(x_2)}{dx_2}}{\pi_1 \dfrac{du(x_1)}{dx_1}} = -\frac{\pi_2 u_2'}{\pi_1 u_1'}$$

Πριν προχωρήσουμε θα τονίσουμε δύο σημεία. Πρώτο, η καμπύλη αδιαφορίας θα αλλάξει μορφή (κυτρώτητα) αν αλλάξουν οι πιθανότητες. Έτσι, δεν αντικατοπτρίζει μόνο την στάση του ατόμου απέναντι στον κίνδυνο αλλά και τις πιθανότητες υλοποίησης των καταστάσεων.

Δεύτερο, μία σημαντική διαφορά με την αντίστοιχη ανάλυση κάτω από συνθήκες βεβαιότητας. Ενώ στην περίπτωση της βεβαιότητας ο χώρος που περικλείεται από τους άξονες αντιπροσωπεύει ένα δυνητικό σημείο κατανάλωσης, στην περίπτωση της αβεβαιότητας κάθε σημείο αντιπροσωπεύει εναλλακτικά επίπεδα κατανάλωσης. Δηλαδή, ενώ στην πρώτη περίπτωση θα καταναλωθεί τόσο το χ1 όσο και το χ2, εδώ θα καταναλωθεί είτε το χ1 είτε το χ2.

Αν το άτομο είναι ουδέτερο στον κίνδυνο, τότε οι καμπύλες αδιαφορίας θα είναι ευθύγραμμα τμήματα και η κλίση τους θα είναι ίση με τον λόγο των πιθανοτήτων. Γιατί? Τι μορφή θα έχουν οι καμπύλες αδιαφορίας αν το άτομο παρουσιάζει ροπή στον κίνδυνο?

3 Επιλογή Αρίστου Συνδυασμού Δικαιωμάτων

3.1 Γενικά

Δικαίωμα είναι ένα συμβόλαιο που επιτρέπει στον κάτοχο να απαιτήσει από τον υπόχρεο κάποιο ποσό (ή άλλη συμπεριφορά) αν πληρωθούν ορισμένες συνθήκες. Τα δικαιώματα έχουν οικονομική αξία, κατά συνέπεια όπου υπάρχουν οργανωμένες αγορές δικαιωμάτων υπάρχουν και ανάλογες τιμές. Έτσι, η αγορά ενός δικαιώματος συνεπάγεται μία βέβαια δαπάνη, ενώ η απόδοση του τίτλου αυτού είναι αβέβαια. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο κατηγορίες δικαιωμάτων. Η πρώτη υπόσχεται μία μονάδα χ αν η κατάσταση του κόσμου 1 υλοποιηθεί, ενώ η δεύτερη υπόσχεται μία μονάδα χ αν υλοποιηθεί η κατάσταση 2. Το πρόβλημα που τίθεται είναι ποιος είναι ο αριστοποιητικός συνδυασμός δικαιωμάτων (μπορεί να αγοράσει περισσότερα του ενός από το κάθε είδος) για κάποιο άτομο που αποστρέφεται τον κίνδυνο.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει οργανωμένη αγορά δικαιωμάτων και ότι το άτομο δεν μπορεί να επηρεάσει τις τιμές στην αγορά αυτή. Κατά συνέπεια αντιμετωπίζει ένα λόγο τιμών $P2/P1$, βάσει του οποίου είναι δυνατό να μεταφέρει εισόδημα από την μία κατάσταση στην άλλη.

3.2 Ανταλλαγή Δικαιωμάτων

Έστω ότι το άτομο έχει στην κατοχή του δικαιώματα της πρώτης κατηγορίας και μόνο. Το σύνολο των απαιτήσεων του αν έλθει η κατάσταση 1 είναι χ1 στο διάγραμμα 3.1. Αν έλθει η κατάσταση 2 οι απαιτήσεις του μηδενίζονται. Είναι δυνατό να ανταλλάξει δικαιώματα της πρώτης κατηγορίας για δικαιώματα της δεύτερης ανταλλάσσοντας με βάση τις τιμές στην αγορά. Ο εισοδηματικός περιορισμός είναι η γραμμή που περνά από το χ1 και έχει κλίση τον λόγο των τιμών των δικαιωμάτων. Είναι φανερό ότι το άτομο θα προχωρήσει στην ανταλλαγή αν με τον τρόπο αυτό αυξήσει την χρησιμότητα του. Η μεγιστοποίηση της χρησιμότητας επιτυγχάνεται στο σημείο Α. Εδώ ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων των δικαιωμάτων ισούται με τον λόγο των τιμών.

Το πρόβλημα του φορέα αποφάσεων είναι

$$\max E(u) = \pi_1 u(x_1) + \pi_2 u(x_2)$$

$$s.t.\ \mathrm{P}_1 x_1 + P_2 x_2 = P_1 \hat{x}_1 = R$$

Η λαγκραντζιανή είναι

$$L = \pi_1 u(x_1) + \pi_2 u(x_2) - \lambda(P_1 x_1 + P_2 x_2 - R)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \pi_1 u_1 - \lambda P_1 = 0$$

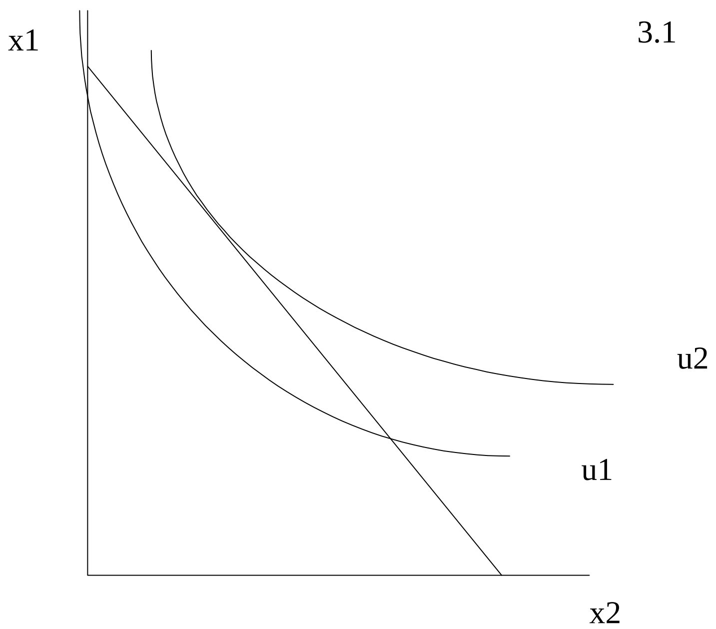
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \pi_2 u_2 - \lambda P_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_1 x_1 + P_2 x_2 = R$$

παίρνοντας τον λόγο των δύο πρώτων συνθηκών έχουμε

$$\frac{\pi_1 u_1}{\pi_2 u_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

δηλαδή ότι ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων ισούται με τον λόγο των τιμών.



Προσοχή. Οι οριακές χρησιμότητες εδώ είναι αυτές που αντιστοιχούν στην προσδοκώμενη χρησιμότητα, και είναι ίσες με το γινόμενο της πιθανότητας επί την οριακή χρησιμότητα της συνάρτησης των βέβαιων αποτελεσμάτων.

Έστω ένας ιχθυέμπορος που αποθηκεύει τα είδη του σε ψυγείο. Αν η κατάσταση 1 είναι ότι το ψυγείο δεν θα χαλάσει πριν πουλήσει το εμπόρευμα και η κατάσταση 2 ότι το ψυγείο θα χαλάσει, τότε μπορεί να πουλήσει μέρος του εμπορεύματος ή για την ακρίβεια μέρος του δικαιώματος στο έσοδο του εμπορεύματος με αντάλλαγμα το δικαίωμα σε εισόδημα αν το ψυγείο χαλάσει. Αυτός είναι ένας τρόπος ασφάλισης του εισοδήματος.

3.3 Παραγωγή και ανταλλαγή Δικαιωμάτων

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η παραγωγή κάποιου γεωργού εξαρτάται από τον καιρό. Αν βρέξει τότε θα αποκτήσει εισόδημα χ1 στο σχήμα 3.3. Αν όμως δεν βρέξει τότε η σοδειά του θα καταστραφεί ολοσχερώς και θα αποκτήσει μηδενικό εισόδημα. Ένας τρόπος που μπορεί να μεταφέρει εισόδημα από την πρώτη κατάσταση στην δεύτερη είναι να κτίσει δεξαμενή και σύστημα ποτίσματος. Αλλά η δραστηριότητα αυτή απαιτεί χρόνο και πόρους που πρέπει να αποσπασθούν από την κανονική καλλιέργεια. Οι πόροι αυτοί θα πάνε χαμένοι αν έλθει η κατάσταση 1. Αν ο νόμος των φθινουσών αποδόσεων ισχύει τότε το όριο των παραγωγικών δυνατοτήτων θα είναι κοίλο προς την τομή των αξόνων. Αν δεν υπάρχουν δυνατότητες ανταλλαγής δικαιωμάτων μέσα από την αγορά, τότε ο γεωργός θα τοποθετηθεί στο σημείο Β που μεγιστοποιεί την προσδοκώμενη χρησιμότητα του.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ανοίγει αγορά δικαιωμάτων για γεωργικά προϊόντα. Η γραμμή ΒΓ έχει κλίση τον λόγο των τιμών στην αγορά αυτή σχήμα 3.4. Είναι δηλαδή συμφέρον για τον γεωργό να προβεί στις δαπάνες πρόληψης και έπειτα να “ανοιχτεί” στην αγορά ασφαλίζοντας τις δαπάνες αυτές. Βέβαια αν οι τιμές ήταν όπως στο σχήμα 3.5, τότε ο γεωργός θα ασφάλιζε μέρος του εισοδήματος του μέσα από τις δαπάνες πρόληψης και ένα μέρος μέσα από την ανταλλαγή δικαιωμάτων.

Το πρώτο πρόβλημα τίθεται ως εξής

$$\max E(u) = \pi_1 u(x_1) + \pi_2 u(x_2)$$

$$s.t.\ \mathrm{F}(\mathrm{x}_1, x_2) = 0$$

όπου ο περιορισμός είναι το όριο των παραγωγικών δυνατοτήτων μετατροπής εισοδήματος στην κατάσταση 1 σε εισόδημα στην κατάσταση 2.

Η λαγκραντζιανή είναι

$$L = \pi_1 u(x_1) + \pi_2 u(x_2) - \lambda(x_1, x_2)$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \pi_1 u_1 - \lambda F_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \pi_2 u_2 - \lambda F_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = F(x_1, x_2) = 0$$

παίρνοντας τον λόγο των δύο πρώτων συνθηκών έχουμε

$$\frac{\pi_1 u_1}{\pi_2 u_2} = \frac{F_1}{F_2}$$

δηλαδή ο λόγος των οριακών χρησιμοτήτων πρέπει να είναι ίσος με τον οριακό λόγο υποκατάστασης στην μετατροπή των δύο κατηγοριών εισοδήματος.

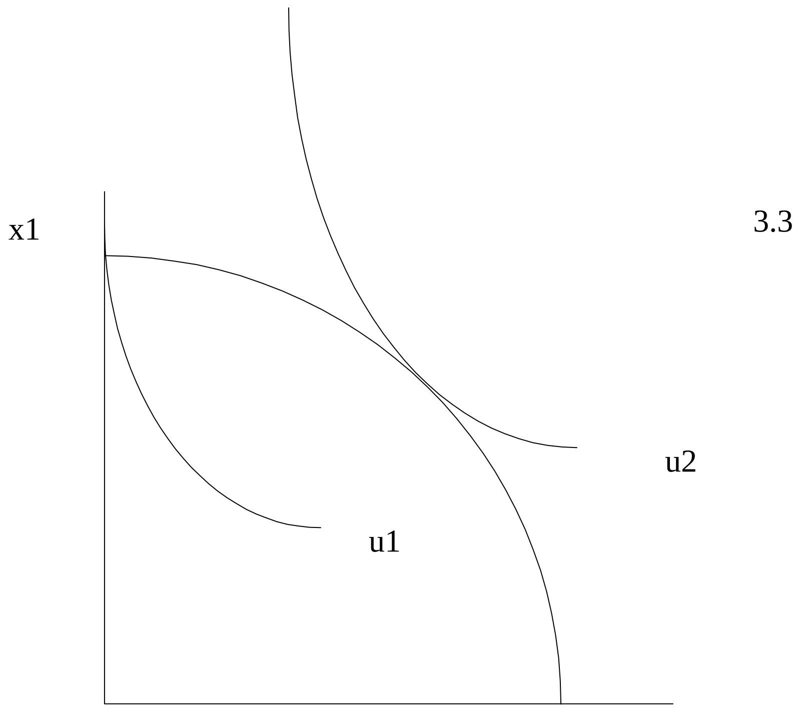
Το δεύτερο πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε δύο στάδια. Το πρώτο είναι

$$\max \ \mathrm{P}_1 x_1 + P_2 x_2$$

$$s.t. \ \mathrm{F}(\mathrm{x}_1, x_2)$$

που δίνει λύσεις x_1^* και x_2^*

με βάση τις λύσεις αυτές ορίζεται το εισόδημα στο πρόβλημα μεγιστοποίησης της προσδοκώμενης χρησιμότητας που είδαμε στην περίπτωση του ιχθυοκαλιεργητή.



ΠΗΓΕΣ

Κύρια πηγή: C.J. McKenna, “The Economics of Uncertainty”, Wheatsheaf, 1986.

Συμπλ. Πηγές: D.M. Kreps, “Notes on the Theory of Choice”, Westrier, 1988

J. Hirshleifer, J.G. Riley, “The Analytics of Uncertainty and Information”, Cambridge, 1992

S. French, “Decision Theory”, Horwood, 1988