

# Κεφάλαιο 1

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

### 1.1 Ορισμός - Προσδιοριστέοι Συντελεστές

1.1 Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί  $a, b, c$  προκειμένου το πολυώνυμο  $(2a + 1)x^2 + (3b - 1)x + (2c = b - a)$  να είναι εκ ταυτότητας ίσο με το μηδέν.

1.2 Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί  $a, b, c$  προκειμένου το πολυώνυμο  $2x^2 + 4x + 5$  να είναι εκ ταυτότητας ίσο με το  $a(x + 2)(x + 3) + bx(x - 1) + c$ .

1.3 Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί  $a, b, c$  προκειμένου το πολυώνυμο  $x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx + 4$  να είναι τετράγωνο του  $x^2 - x + c$ .

1.4 Να βρεθεί πολυώνυμο που το τετράγωνο του να κάνει:

$$4 - 4x + 5x^2 - 2x^3 + x^4$$

### 1.2 Διαίρεση πολυωνύμων

1.5 Με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών να γίνουν οι διαιρέσεις:

$$(4x^3 - 5x^2 - 2x + 3) : (x^2 - 3x + 2)$$

$$(2x - 3x^4 + 5 + x^2) : (x^2 + x + 1)$$

$$(2x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 2x + 3) : (2x^2 - 3x + 1)$$

**1.6** Να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο  $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$  διαιρείται ακριβώς (υπόλοιπο μηδεν) δια του  $(x - 1)^2$ .

**1.7** Να προσδιορισθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $a, b$  προκειμένου το πολυώνυμο  $x^3 - 2ax^2 + bx + 6$  να διαιρείται ακριβώς (υπόλοιπο μηδεν) δια του  $(x - 2)(x - 3)$ .

**1.8** Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί  $a, b$  προκειμένου το πολυώνυμο  $2x^3 + ax^2 - 13x + b$  να διαιρείται ακριβώς (υπόλοιπο μηδεν) δια του  $(x + 2)(x - 3)$ .

**1.9** Εάν  $a \neq b$ , να αποδειχθεί ότι το υπόλοιπο της διαιρέσεως ενός οποιουδήποτε πολυωνύμου  $p(x)$  δια του γινομένου  $(x - a)(x - b)$  είναι:

$$\frac{p(a) - p(b)}{a - b}x + \frac{bp(a) - ap(b)}{b - a}$$

**1.10** Ακέραιον πολυώνυμον  $f(x)$  διαιρούμενον δια  $x+1$  δίνει υπόλοιπον 2, διαιρούμενον δια  $x-2$  δίδει υπόλοιπον 11 και δια  $x+3$  δίνει υπόλοιπον 6. Να βρεθεί το υπόλοιπον της διαιρέσεως του  $f(x)$  δια του γινομένου  $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$ .

### 1.3 Σχήμα Horner

**1.11** Με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών ΚΑΙ την μέθοδο Horner, να γίνουν οι διαιρέσεις:

$$(4x^3 - 5x^2 + x - 3) : (x - 2)$$

$$(5x^4 - 2x^2 + 5) : (x + 2)$$

$$(x + 1 + 3x^2 - 6x^4) : (3x + 2)$$

**1.12** Με την μέθοδο Horner, να γίνουν οι διαιρέσεις:

$$(x^5 + 1) : (x - 1)$$

$$(x^5 + 1) : (x + 1)$$

$$(8x^3 - 27) : (2x + 3)$$

**1.13** Με την μέθοδο Horner, να βρεθεί ο  $a$  προκειμένου οι κάτωθι διαιρέσεις να είναι τέλειες:

$$(2ax^3 - 5ax^2 + a^2x - a + 2) : (x - 2)$$

$$(x^2 - 5ax + a^2) : (2x - 1)$$

$$(2x^2 - 5x + 3) : (x + a)$$

## 1.4 Ρίζες πολυωνύμων - Επίλυση εξισώσεων

1.14 Επιλύσατε τις εξισώσεις:

$$(a) \quad 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$$

$$(b) \quad 3x^3 - 22x^2 + 48x - 32 = 0$$

$$(c) \quad 10 - 7x - 4x^2 + x^3 = 0$$

1.15 Επιλύσατε τις εξισώσεις:

$$(a) \quad 20 - 4x - 15x^2 - 2x^3 + x^4 = 0$$

$$(b) \quad 20 - 4x - 65x^2 - 17x^3 + 6x^4 = 0$$

$$(c) \quad 3 - 6x - 10x^2 + 2x^3 + 3x^4 = 0$$

1.16 Να επιλυθεί η εξίσωση:  $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$  γνωστού όντος ότι μία ρίζα είναι η  $1 - \sqrt{2}$ .

1.17 Να επιλυθεί η εξίσωση:  $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$  γνωστού όντος ότι το άθροισμα δύο ριζών της είναι μηδέν.

1.18 Σχηματίσατε τριτοβάθμια πολυώνυμα με ρίζες τους αριθμούς:

$$(a) \quad -3, 5, 7 \quad (b) \quad 2, 2, 1 \quad (c) \quad 4, 2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}$$

1.19 Δίδεται η εξίσωση:  $2x^3 - 3x^2 - x + 5 = 0$ . Υπολογίσατε τις ποσότητες:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \quad , \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

όπου  $r_1, r_2, r_3$  οι ρίζες της.

1.20 Να ορισθεί ο  $k$  προκειμένου η εξίσωση  $x^4 + 4x^3 - 8x^2 + k = 0$  να έχει ίσας ρίζας.