ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Προηγμένα Δίκτυα Επικοινωνιών

Ενότητα 2: Μοντέλα Συστημάτων Αναμονής σε Δίκτυα Επικοινωνιών

Διδάσκων: Λάζαρος Μεράκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προηγμένα Δίκτυα Επικοινωνιών

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεματικές Ενότητες (ΘΕ) μαθήματος:

ΘΕ1: Εισαγωγή
(Κεφ. 1 του βιβλίου)

ΘΕ2: Συστήματα Αναμονής (M/M/1 και παραλλαγές, M/G/1, συστήματα με προτεραιότητες, δίκτυα ουρών)

ΘΕ3: Επίπεδο Δικτύου
(Κεφ. 4 και 5 του βιβλίου)

Οι διαφάνειες αυτής της ενότητας αποτελούν προσαρμογή και απόδοση στα ελληνικά διαφανειών που είχαν αναπτυχθεί από τους συγγραφείς του βιβλίου *Data Networks (2nd Edition)*, D. Bertsekas and R. Gallager, Prentice Hall, 1991 (ISBN: 0132009161) και αφορούν στο 3ο Κεφάλαιο του βιβλίου αυτού.

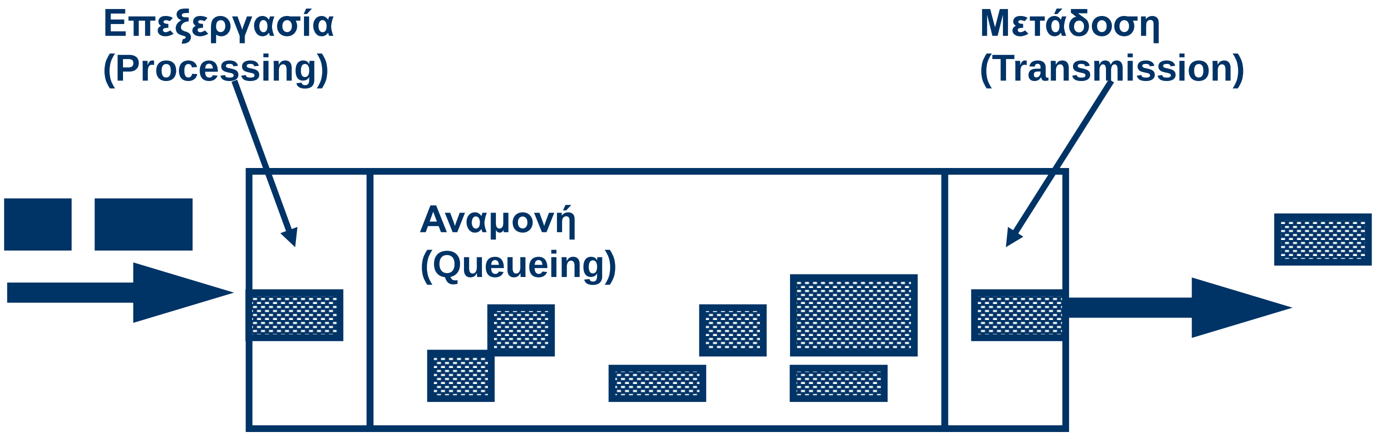
Προσαρμογή και επιμέλεια της απόδοσης των πρωτότυπων διαφανειών στα ελληνικά : Λάζαρος Μεράκος

Περιεχόμενα

Τι περιμένουμε από τα Μοντέλα Αναμονής;

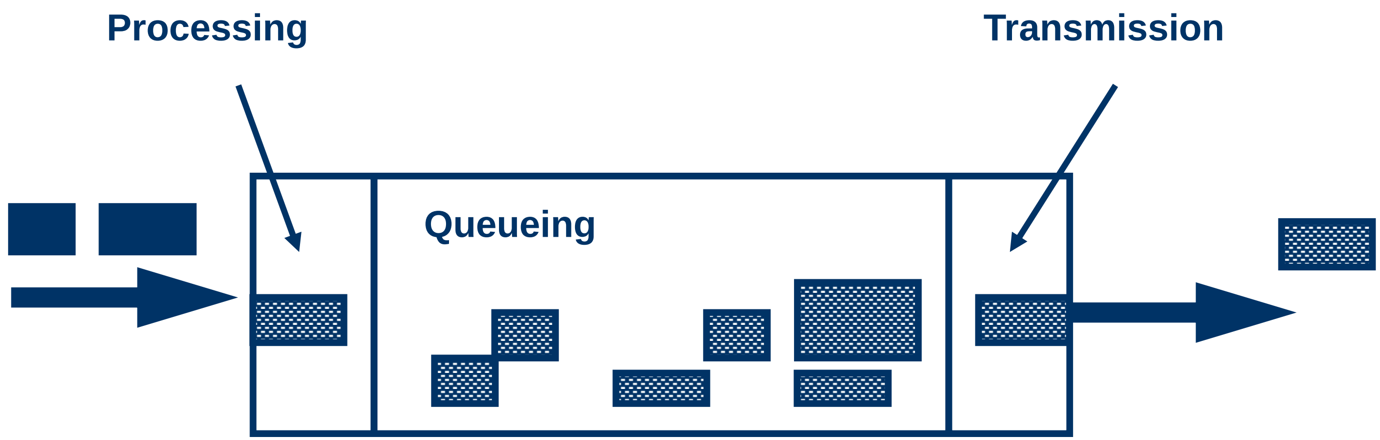
- **Χρήσιμα για ανάλυση απόδοσης, σχεδιασμό δικτύων και πρωτοκόλλων ελέγχου δικτύου (δρομολόγησης,…)**
- **Απαιτούν απλουστευτικές υποθέσεις**
- **Δίνουν ποιοτικά αποτελέσματα, βοηθούν στην κατανόηση των παραγόντων καθυστέρησης, και σε μερικές περιπτώσεις μπορούν να αποτιμήσουν την προβλεπόμενη καθυστέρηση**
- **Τα αναλυτικά μοντέλα συμπληρώνουν τα μοντέλα προσομοίωσης, που συνήθως είναι πιο λεπτομερή**

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΗΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΣΕ ΚΟΜΒΟ



- **Καθυστέρηση Επεξεργασίας:** Χρόνος από λήψη πακέτου μέχρι τοποθέτηση στην ουρά (σταθερή, εκτός αν η επεξεργαστική ισχύς είναι περιορίζων πόρος)
- **Καθυστέρηση Αναμονής:** Χρόνος στην ουρά μέχρι την εκκίνηση της μετάδοσης (συνήθως μεταβλητή)

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΗΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΣΕ ΚΟΜΒΟ



- **Καθυστέρηση Μετάδοσης :** Χρόνος μετάδοσης του πακέτου (ανάλογος του μήκους του πακέτου)
- **Καθυστέρηση Διάδοσης :** Χρόνος που απαιτείται για να πάει το τελευταίο bit από πομπό σε δέκτη (ανάλογη της φυσικής απόστασης μεταξύ των κόμβων. Μεγάλη για δορυφορικές ζεύξεις)

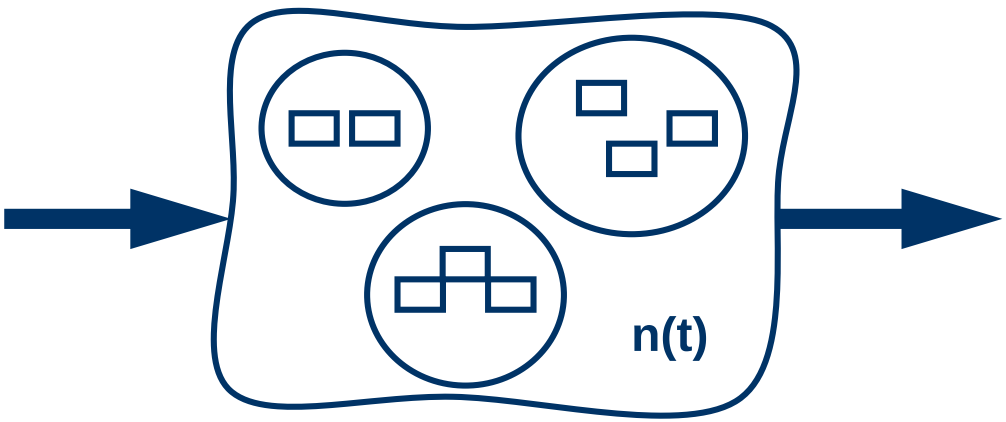
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ LITTLE

- Δείχνει ότι για δοσμένο ρυθμό αφίξεων λ σε ένα οποιοδήποτε σύστημα αναμονής

  Μέσος Αριθμός Πελατών = λ x Μέση Καθυστέρηση

- Πολύ σημαντικό: ισχύει κάτω από ελάχιστες υποθέσεις

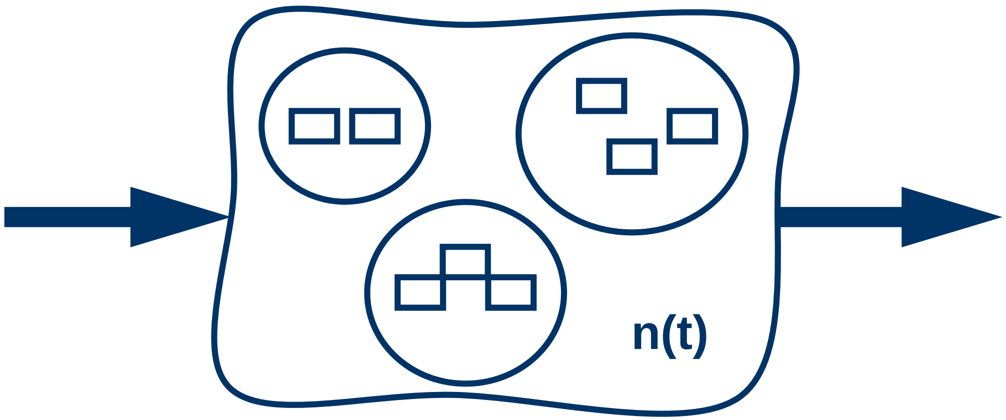
Κύριες Παράμετροι ενός Συστήματος Αναμονής



$\mathbf{p_n(t)}$ = πιθανότητα να υπάρχουν **n** πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή **t**

$\mathbf{p_n = \lim_{t \to \infty} p_n(t)}$ **:** Κατάσταση ισορροπίας (Steady state)

Κύριες Παράμετροι ενός Συστήματος Αναμονής



$N(t) = \sum_{n=o}^{\infty} n p_n(t)$: Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα στο χρόνο **t**

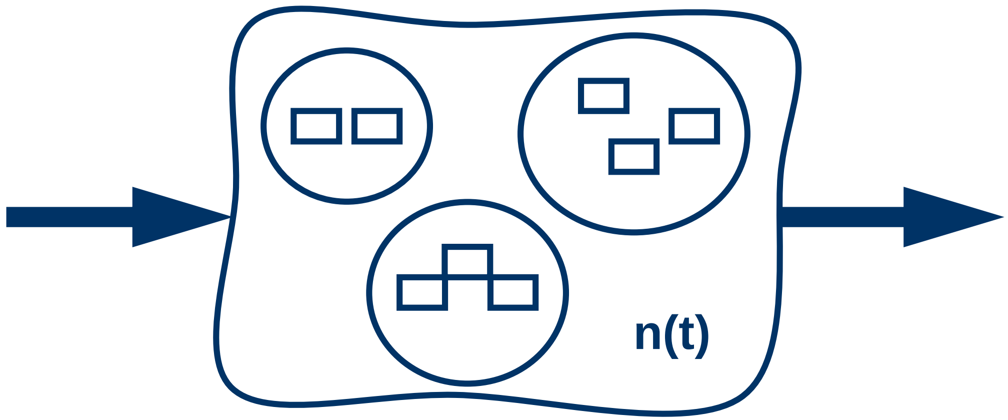
$N = \lim_{t \to \infty} N(t)$: Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα

$N_t =$ Χρονικός μέσος αριθμός στο σύστημα από **0** μέχρι **t**

✓Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι **εργοδικό** (χρονικός μέσος = πιθανοτικός μέσος)

$$N = \lim_{t \to \infty} N(t) = \lim_{t \to \infty} N_t$$

Κύριες Παράμετροι ενός Συστήματος Αναμονής



- T_k : Μέση καθυστέρηση του k πελάτη (Average system time)
- $T = \lim_{k \to \infty} T_k$ (Μέση καθυστέρηση στο σύστημα)
- T μπορεί να εκφραστεί και σαν χρονικός μέσος

$$T = \lim_{k \to \infty} \frac{\text{Άθροισμα καθυστερήσεων πελατών μέχρι } t}{\text{Αριθμός πελατών μέχρι } t}$$

Θεώρημα του LITTLE : $N = \lambda T$

Όπου:

- **N** = Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα
- λ = Ρυθμός αφίξεων (πελάτες / μονάδα χρόνου)
- **T** = Μέση καθυστέρηση στο σύστημα

- Το θεώρημα του Little εφαρμόζεται σε κάθε σύστημα αφίξεων-εξυπηρετήσεων με την κατάλληλη ερμηνεία των **N**, λ και **T**.

Θεώρημα του LITTLE : N= λT

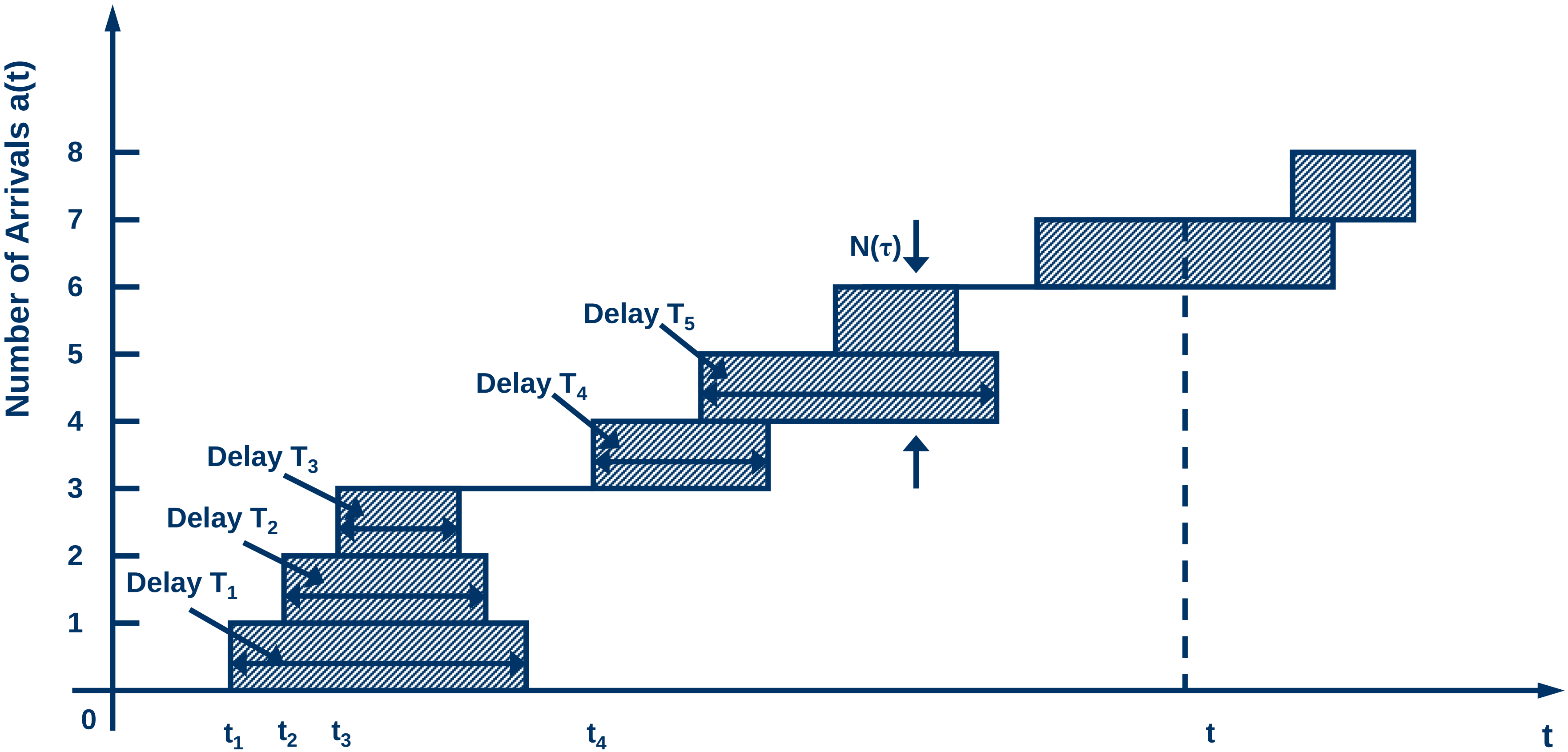
Παραδείγματα:

- Εστιατόριο γρήγορου φαγητού (μικρό **T**) απαιτεί μικρό χώρο εστίασης (μικρό **N**) για το ίδιο λ
- Σε βροχερή μέρα υπάρχει μεγαλύτερο μποτιλιάρισμα σε ώρες αιχμής (μεγάλο **N**) και οι καθυστερήσεις είναι μεγαλύτερες (μεγάλο **T**)

Σημειώστε:

- Το θεώρημα του Little δεν μας δίνει τα **N** και **T**, μόνο τη μεταξύ τους σχέση.
- Επιπρόσθετες (στατιστικές) υποθέσεις απαιτούνται για να βρούμε τα **N** και**T**.

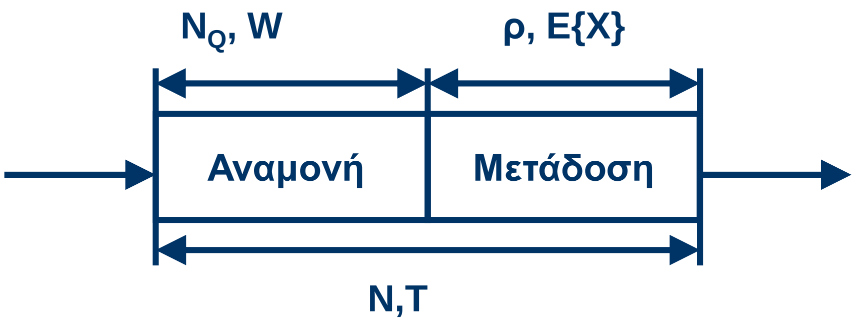
Απόδειξη του θεωρήματος του LITTLE



- Γραμμοσκιασμένη Περιοχή $= \int_0^t N(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{a(t)} T_i(t)$ or $(1/t)\int_0^t N(\tau)d\tau \approx (a(t)/t)\sum_{i=1}^{a(t)} T_i/a(t)$
- Παίρνοντας το όριο $t \to \infty$ προκύπτει $N = \lambda T$

Θεώρημα του LITTLE

Παράδειγμα:



- Εφαρμογή του θεωρήματος στην αναμονή (ουρά)

$$\mathbf{N_Q = \lambda\, W}$$

όπου $\mathbf{N_Q}$ = μέσος αριθμός πακέτων που αναμένουν στην ουρά
$\mathbf{W}$ = μέση καθυστέρηση στην ουρά

- Εφαρμογή του θεωρήματος στο τμήμα μετάδοσης (εξυπηρέτης)

$$\boldsymbol{\rho = \lambda\, E\{X\}}$$

όπου $\boldsymbol{\rho}$ = μέσος αριθμός πακέτων υπό μετάδοση (ένταση κίνησης)
$\mathbf{E\{X\}}$ = μέσος χρόνος μετάδοσης

Θεώρημα του LITTLE

Δεύτερο παράδειγμα:

- Εφαρμογή στη ροή κίνησης i

$$N_i = \lambda_i T_i$$

- Εφαρμογή σε όλες τις ροές μαζί

$$(N_1 + \ldots N_k) = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)T$$

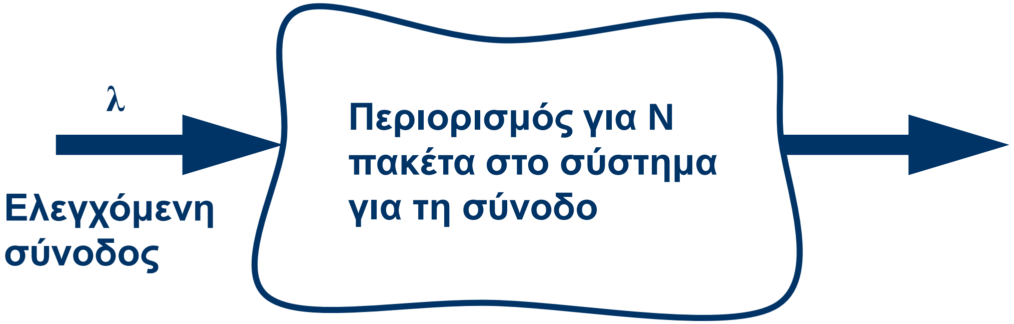
όπου

$$T = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i\right) / \left(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k\right)$$ *(μέσος από όλα τα i)*

Θεώρημα του LITTLE

Άλλο ένα παράδειγμα

Έλεγχος ροής συνόδου **w / window size N**



Υπόθεση: πακέτα είναι πάντα διαθέσιμα προς αποστολή

Ρυθμαπόδοση λ **= N/T**

- Όπως μεγαλώνει η συμφόρηση (**T** μεγαλώνει), το λ μικραίνει (ο έλεγχος ροής γίνεται πιο δραστικός)
- Αν το **N** μεγαλώνει, το **T** μεγαλώνει

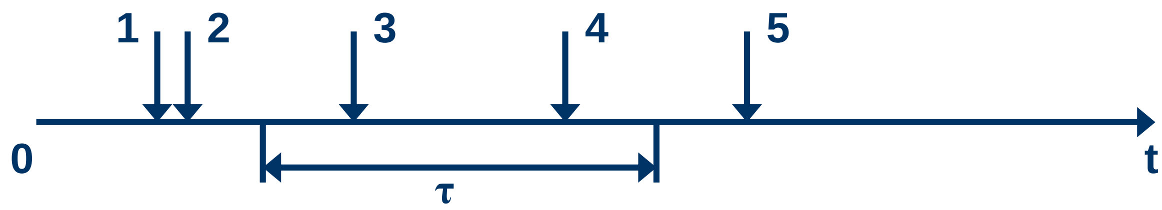
Το σύστημα M/M/1

- Ένας εξυπηρετητής **(1)**
- Διαδικασία αφίξεων Poisson **(1st M)**
- Εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης **(2nd M)**

- Θέλουμε

$\mathbf{p_n}$ = πιθανότητα **n** πελάτες στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας

Διαδικασία POISSON με ρυθμό λ



Στοχαστική διαδικασία {A(t)| t≥ 0} που παίρνει τιμές 0,1,2,… έτσι ώστε

- **A(t)** = αριθμός αφίξεων από **0** έως **t**
- αριθμοί αφίξεων σε ξεχωριστά διαστήματα intervals είναι ανεξάρτητοι
- αριθμός αφίξεων σε διάστημα μήκους $\boldsymbol{\tau}$ έχει κατανομή Poisson με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda\tau}$, δηλ.,

$$P\{A(t+\tau) - A(t) = n\} = e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}, n = 0,1,\ldots$$

Ιδιότητες της διαδικασίας POISSON

- Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι με παράμετρο λ

  $$P\{\tau_n \leq s\} = 1 - e^{-\lambda s}, \qquad s \geq 0$$

  όπου τ_n = χρόνος μεταξύ άφιξης n και άφιξης (n+1)

- $P\{A(t+\delta)-A(t) = 0\} = 1-\lambda\delta + o(\delta)$

  $P\{A(t+\delta)-A(t) = 1\} = \lambda\delta + o(\delta)$

  $P\{A(t+\delta)-A(t) \geq 2\} = o(\delta)$

  όπου $o(\delta)/\delta \rightarrow 0$ όπως $\delta \rightarrow 0$

Ιδιότητες της διαδικασίας POISSON

Αν $\mathbf{A_1, A_2, \ldots A_k}$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, τότε $\mathbf{A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k}$ είναι Poisson με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$

- Η διαδικασία Poisson είναι τυπικά ένα καλό μοντέλο για τη συγκεντρωτική κίνηση από ένα μεγάλο αριθμό «μικρών» χρηστών.

Το σύστημα M/M/1

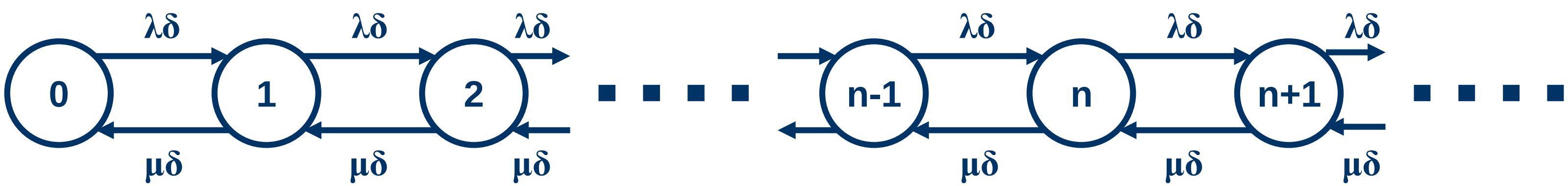
- Ένας εξυπηρετητής
- Αφίξεις Poisson με παράμετρο λ
- Εκθετικά κατανεμημένοι χρόνοι εξυπηρέτησης με παράμετρο μ

$$P\{x \le s\} = 1 - e^{-\mu s}, \quad E\{x\} = \frac{1}{\mu}$$

- Ανεξάρτητοι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων

Κατανομή αριθμού πελατών στο σύστημα

Διάγραμμα μετάβασης κατάστασης
(Αλυσίδα Markov)



Ανάλυση ενδεχομένων σε ένα διάστημα δ sec

- Συχνότητα μετάβασης από **n** σε **n+1** $\approx p_n \lambda\delta$
- Συχνότητα μετάβασης από **n+1** σε **n** $\approx p_{n+1}\mu\delta$
- Πρέπει να είναι ίσες

Κατανομή αριθμού πελατών στο σύστημα

- **Εξισώσεις τοπικής ισορροπίας:**

$$p_n\lambda\delta + o(\delta) = p_{n+1}\mu\delta + o(\delta)$$

- **Διαιρούμε με δ και παίρνουμε όριο όπως το $\delta \rightarrow 0$**

$$p_{n+1} = \rho p_n, \qquad n = 0,1,\ldots$$

όπου $\rho = \lambda/\mu$

$$p_{n+1} = \rho p_n = \rho(\rho p_{n-1}) = \ldots = \rho^{n+1} p_0$$

- **Άμα βρούμε το p_0 τότε τα έχουμε όλα**

Κατανομή αριθμού πελατών στο σύστημα

Έχουμε

$$p_{n+1} = \rho^{n+1} p_0, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

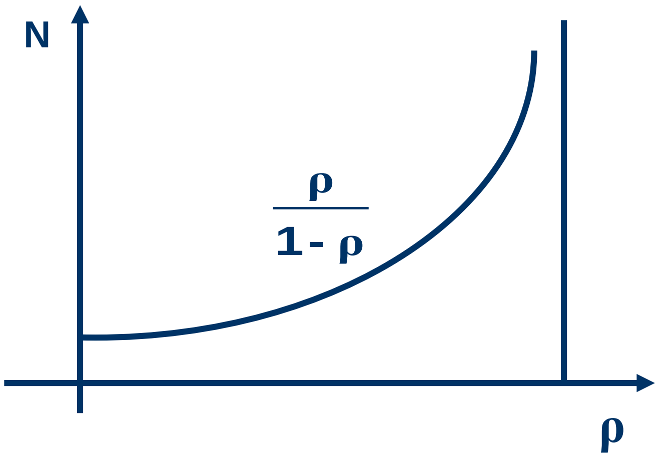
$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n p_0 = \frac{p_0}{1-\rho}$$

$$p_0 = 1 - \rho$$

$$p_n = \rho^n (1-\rho), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Έτσι

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^n (1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho}$$



Κατανομή αριθμού πελατών στο σύστημα

- **Μέση καθυστέρηση (από το θεώρημα του Little)**

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\lambda/\mu}{\lambda(1-\lambda/\mu)}$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- **Μέση καθυστέρηση στην ουρά**

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$W = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

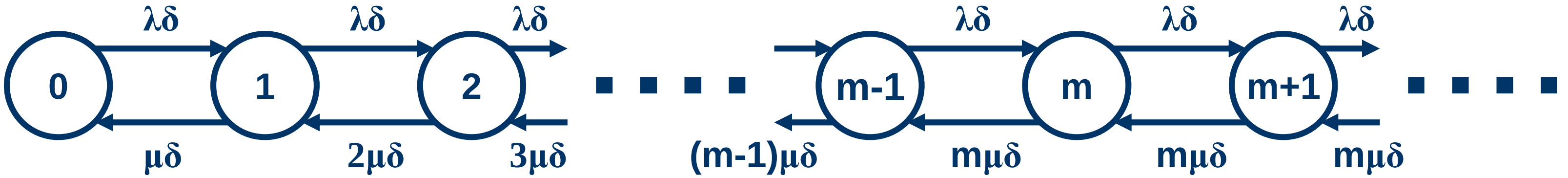
Συστήματα M/M/m, M/M/∞, and M/M/m/m

Ανάλυση παρόμοια με M/M/1

Χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο αλυσίδας Markov για να βρούμε την κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα

Σύστημα M/M/m

Poisson αφίξεις **(λ)**, εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης **(μ)**, **m** εξυπηρετητές



$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n, \qquad n \leq m$$

$$\lambda p_{n-1} = m\mu p_n, \qquad n > m$$

Χρησιμοποιούμε αυτές τις εξισώσεις για να εκφράσουμε τις πιθανότητες p_n ως συνάρτηση της πιθανότητας p_0 να είναι το σύστημα άδειο.

Το σύστημα M/M/m

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^n}{n!} \quad , \quad n \le m \\[2ex] p_0 \dfrac{m^m \rho^n}{m!} \quad , \quad n > m \end{cases} \qquad \textit{where} \qquad \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

Αντικαθιστώντας στη εξίσωση $\Sigma_n p_n = 1$ λαμβάνουμε

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

Σύστημα M/M/m

Πιθανότητα αφικνούμενος πελάτης να χρειαστεί να αναμείνει στην ουρά (Erlang C formula)

$$P_Q = P\{\text{Queueing}\} = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \frac{p_0 (m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

- $W = \dfrac{\rho P_Q}{\lambda(1-\rho)}$ (Μέσος χρόνος στην ουρά)
- $T = \dfrac{1}{\mu} + W$ (Μέσος χρόνος στο σύστημα)
- $N = \lambda T = m\rho + \dfrac{\rho P_Q}{1-\rho}$ (Μέσος αριθμός στο σύστημα)

Σύστημα M/M/∞

Poisson αφίξεις (λ), εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης (μ), άπειροι εξυπηρετητές

- Θέτω $m = \infty$ στο σύστημα M/M/m

$$p_n = (\lambda/\mu)^n \,(e^{-\lambda/\mu})/n! \;, \quad n = 0, 1, \ldots$$

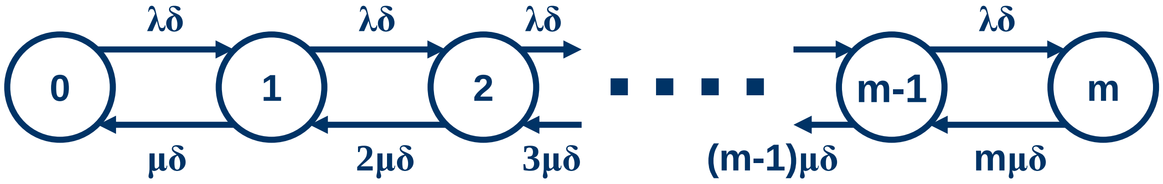
Η κατανομή του αριθμού είναι Poisson με παράμετρο λ/μ

- $N = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (μέση τιμή της Poisson)
- $T = \dfrac{N}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu}$ (από το θεώρημα τουLittle)

(= Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης, όπως περιμέναμε)

Σύστημα M/M/m/m

Poisson αφίξεις (λ), εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης (μ), m εξυπηρετητές, το πολύ m πελάτες επιτρέπονται στο σύστημα



$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n, \qquad n = 1,\ldots, m$$

$$p_n = p_0(\lambda/\mu)^n (1/n!), \quad n = 1,\ldots, m$$

Σύστημα M/M/m/m

Λύνουμε ως προς $\mathbf{p_0}$ στην $\mathbf{\Sigma_n p_n = 1}$ και λαμβάνουμε

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}$$

και

$$p_n = p_0\, (\lambda/\mu)^n (1/n!), \qquad n = 1, \ldots, m$$

Το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι απασχολημένο

$$p_m = \frac{(\lambda/\mu)^m / m!}{\sum_{n=0}^{m} (\lambda/\mu)^n / n!}$$

Erlang B Formula

Το σύστημα M/G/1

- Η μέση καθυστέρηση μπορεί να βρεθεί με απλές τεχνικές

- Η κατανομή του αριθμού των πελατών είναι δύσκολο να βρεθεί

Το σύστημα M/G/1

- Poisson αφίξεις (ρυθμός λ)
- Χρόνοι εξυπηρέτησης ανεξάρτητοι των χρόνων άφιξης
- Γενική κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης, με δοσμένα **E{X}**, και **E{X^2}**
- Ένας εξυπηρετητής

Το σύστημα M/G/1

Pollaczek - Khinchine (P - K) formula

$$W = \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$

(Μέσος χρόνος στην ουρά)

$$T = E\{X\} + \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$

(Μέσος χρόνος στο σύστημα)

$$N = \lambda T$$

(Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα)

$$\rho = \lambda / \mu$$

Το σύστημα M/G/1

Παραδείγματα:

- **Σύστημα M/M/1**

$$E\{X\} = \frac{1}{\mu}, \qquad E\{X^2\} = \frac{2}{\mu^2},$$

$$W = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

- **Σύστημα M/D/1 (Deterministic Service Time – όλοι έχουν σταθερό χρόνο εξυπηρέτησης 1/μ)**

$$E\{X\} = \frac{1}{\mu}, \qquad E\{X^2\} = \frac{1}{\mu^2},$$

$$W = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$$ (ελάχιστο για δοσμένα μ και ρ)

Το σύστημα M/G/1

Απόδειξη της φόρμουλας P - K

- Έστω

  W_i = χρόνος αναμονής στην ουρά του πελάτη i

  R_i = υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης όπως τον βλέπει ο πελάτης i

  X_i = χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη i

  N_i = αριθμός πελατών που βρίσκει ο πελάτης i να αναμένουν στην ουρά

- $$W_i = R_i + \sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j$$
- $$E\{W_i\} = E\{R_i\} + E\{X\}E\{N_i\}$$
- $$W = R + \frac{1}{\mu} N_Q \qquad (\ i \to \infty)$$
- $$W = R + \rho W \qquad (N_Q = \lambda W,\ \text{θεώρημα Little})$$

Το σύστημα M/G/1

Τελικά έχουμε

- $$W = \frac{R}{1-\rho}$$

Και χρησιμοποιώντας

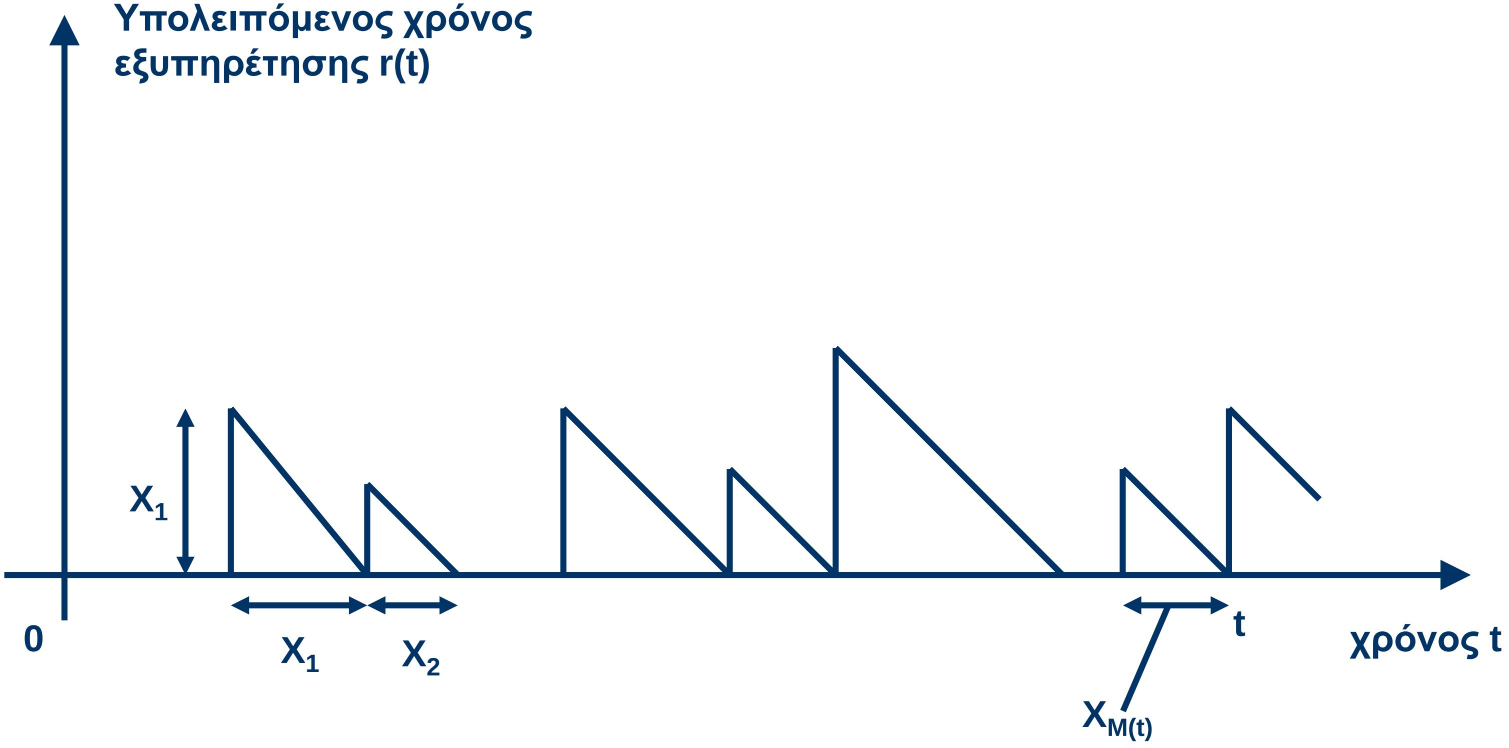
$$R = \frac{\lambda E\{X^2\}}{2}$$

Για το μέσο χρόνο αναμονής (δες επόμενο)

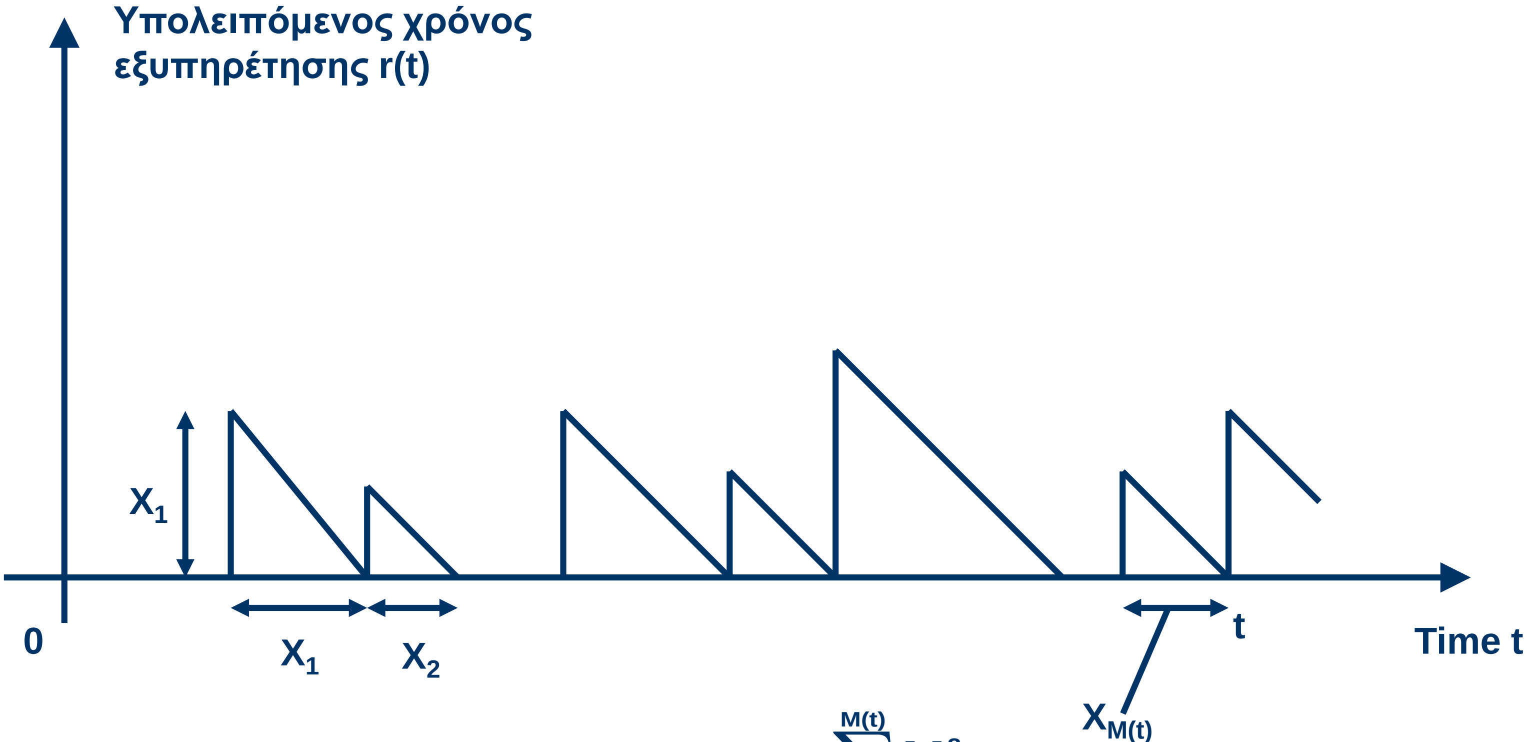
$$W = \frac{\lambda E\{X^2\}}{2(1-\rho)}$$

Το σύστημα M/G/1

Υπολογισμός του υπολειπόμενου χρόνου εξυπηρέτησης



Το σύστημα M/G/1



$$\frac{1}{t}\int_0^t r(\tau)d\tau = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{M(t)}\frac{1}{2}X_i^2 = \frac{1}{2}\frac{M(t)}{t}\frac{\sum_{i=1}^{M(t)}X_i^2}{M(t)}$$

Παίρνοντας το όριο όπως το $t \to \infty$ προκύπτει

$$R = (1/2)\lambda E\{X^2\}$$

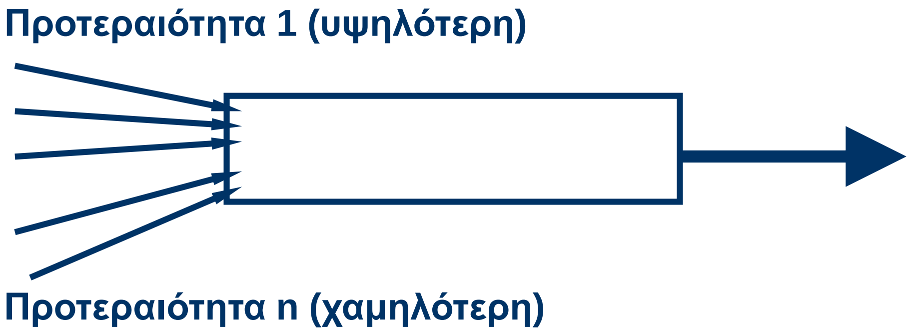
Αναμονή με Προτεραιότητες

- Οι προτεραιότητες εισάγουν πολυπλοκότητα

- Δύο σημαντικά μοντέλα επιδέχονται λύσεις κλειστής μορφής με βάση το μοντέλο M/G/1

Αναμονή με Προτεραιότητες

Μοντέλο 1: Nonpreemptive Priority Queueing



- Ο πελάτης υπό εξυπηρέτηση δεν διακόπτεται
- **n** κλάσεις προτεραιοτήτων(1 = υψηλότερη, …n = χαμηλότερη)
- λ_k, μ_k : ρυθμοί άφιξης και εξυπηρέτησης προτεραιότητας **k**
- W_k : μέσος χρόνος αναμονής για προτεραιότητα **k**
- $\rho_k = \lambda_k / \mu_k$: ένταση κίνησης για προτεραιότητα **k**
- **R** = μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης

Αναμονή με Προτεραιότητες

Υποθέτοντας $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n < 1$ έχουμε

$$W_k = \frac{R}{(1-\rho_1-\ldots-\rho_{k-1})(1-\rho_1-\ldots-\rho_k)}, \qquad k = 1,\ldots,n$$

$$R = \frac{1}{2}\overline{X^2}$$

$$\overline{X^2} = \lambda_1 E\{X_1^2\} + \ldots + \lambda_n E\{X_n^2\}$$

Σημειώστε την ανεξαρτησία του χρόνου αναμονής $\mathbf{W_k}$ της υψηλής προτεραιότητας από το ρυθμό άφιξης λ_i χαμηλής προτεραιότητας.

Αναμονή με Προτεραιότητες

Μοντέλο 2: Preemptive Resume Priority

- Ο υπό εξυπηρέτηση πελάτης διακόπτεται από αφικνούμενο πελάτη υψηλότερης προτεραιότητας
- Η εξυπηρέτηση του πελάτη που διεκόπη ξαναρχίζει από το σημείο της διακοπής
- Μέσος χρόνος στο σύστημα για προτεραιότητα **k**

$$T_k = \frac{(1/\mu_k)(1-\rho_1 - \ldots - \rho_k) + R_k}{(1-\rho_1 - \ldots - \rho_{k-1})(1-\rho_1 - \ldots - \rho_k)}$$

όπου

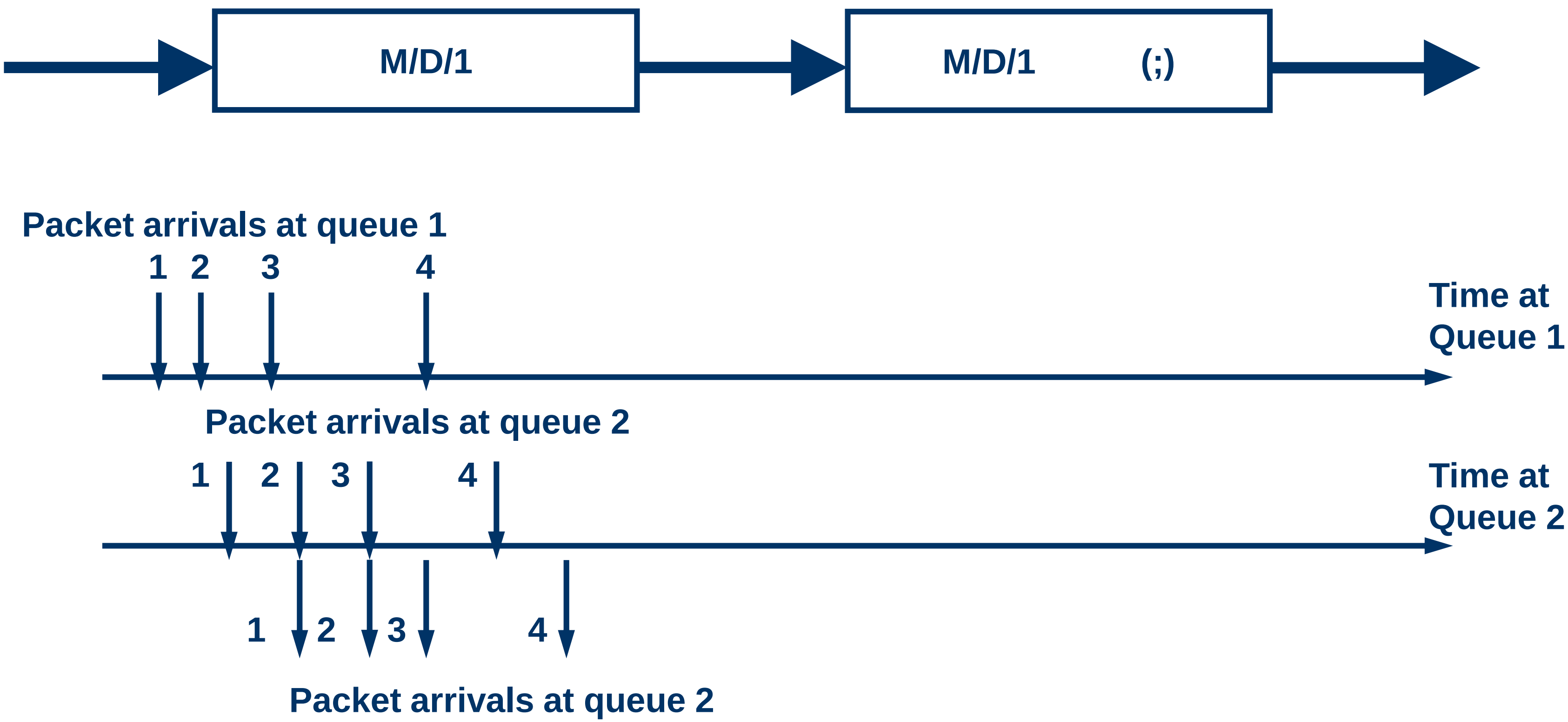
$$R_k = \frac{\sum_{1}^{k} \lambda_i E\{X_i^2\}}{2}$$

Δίκτυα Ουρών

- Δύσκολο να βρεθούν λύσεις κλειστής μορφής
- Χρειάζονται απλουστευτικές υποθέσεις

Δίκτυα Ουρών

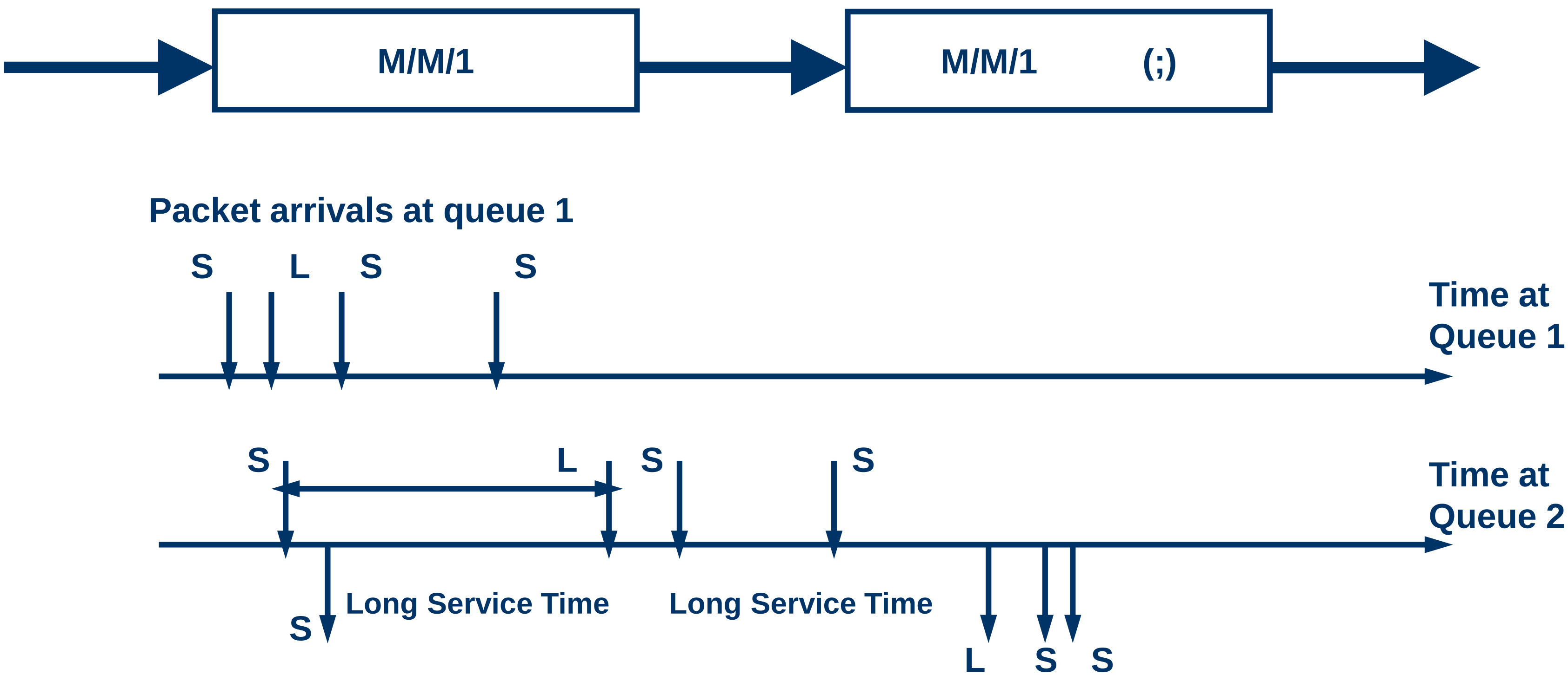
Ουρές στη σειρά: Παράδειγμα 1



- Δεν υπάρχει αναμονή στη δεύτερη ουρά
- Το μοντέλο M/D/1 δεν εφαρμόζεται στη δεύτερη ουρά

Δίκτυα Ουρών

Ουρές στη σειρά: Παράδειγμα 2



- Χρόνος «ενδοάφιξης» στη 2η ουρά είναι μεγάλος όταν λαμβάνεται μεγάλο πακέτο
- Οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων δεν είναι ανεξάρτητοι. Η 2η ουρά δεν είναι M/M/1.

Δίκτυα Ουρών

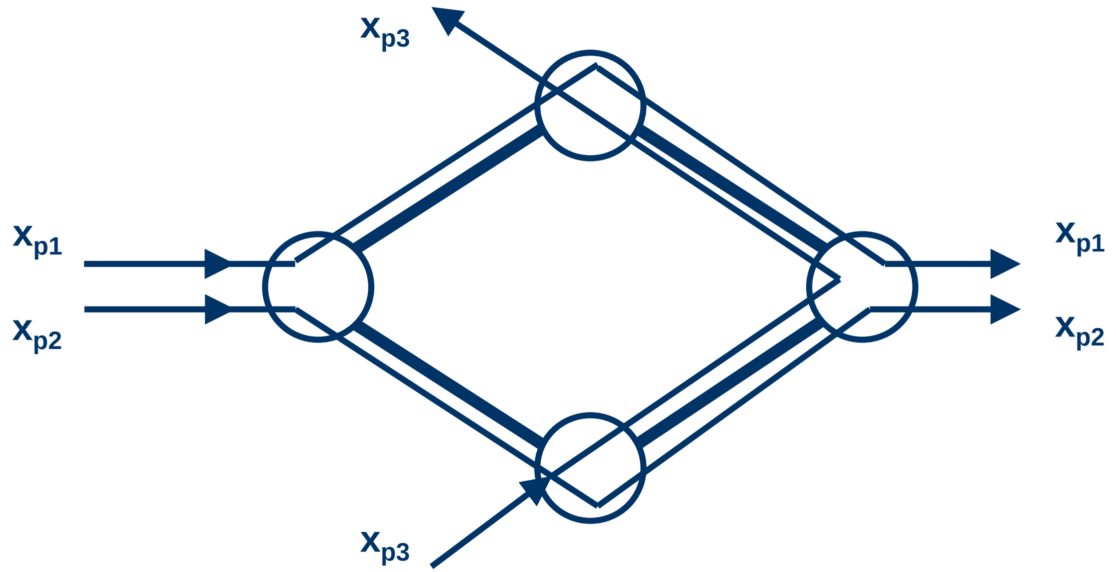
- Ενδιαφέρον αποτέλεσμα για το «εν σειρά» σύστημα M/M/1 :

  Η διαδικασία αναχωρήσεων από τη 1η ουρά είναι Poisson (Burke’s Theorem). Επομένως, αν οι χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων ήταν ανεξάρτητοι , η 2η ουρά θα ήταν M/M/1.

- Η συνήθης υπόθεση στα δίκτυα επικοινωνιών είναι να υποθέσουμε αυτή την ανεξαρτησία.

Δίκτυα Ουρών

Μοντέλο δικτύων ουρών



- Διάφορες ροές πακέτων. Η ροή στο μονοπάτι **p**, έχει ρυθμό $\mathbf{x_p}$ (packets / sec)
- Ολικός ρυθμός άφιξης στη ζεύξη (i,j)
- λ_{ij} = $\mathbf{\Sigma x_p}$ όλα τα μονοπάτια p που διέρχονται από τη ζεύξη (i,j)
- μ_{ij} = Ρυθμός εξυπηρέτησης στη ζεύξη (i,j)
- $\mathbf{N_{ij}}$ = Μέσος αριθμός πακέτων στη ζεύξη (i,j)

Δίκτυα Ουρών

Προσέγγιση Ανεξαρτησίας του Kleinrock

- Υποθέτει ότι όλες οι ουρές (i,j) συμπεριφέρονται όπως η M/M/1 με δοσμένο ρυθμό άφιξης λ_{ij}, ρυθμό εξυπηρέτησης μ_{ij}, και καθυστέρηση επεξεργασίας / διάδοσης d_{ij}.

- $$N_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} + \lambda_{ij} d_{ij}$$

- Μέσος αριθμός πακέτων σε ολόκληρο το δίκτυο.

$$N = \sum_{(i,j)} N_{ij} = \sum_{(i,j)} \left(\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} + \lambda_{ij} d_{ij} \right)$$

Δίκτυα Ουρών

- Μέσος χρόνος στο σύστημα (θεώρημα Little)

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} \sum_{(\mathbf{i,j})} \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{ij}}}{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{ij}} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{ij}}} + \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{ij}} \mathbf{d}_{\mathbf{ij}} \right)$$

όπου $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{p}} \mathbf{x}_{\mathbf{p}}$ είναι ο συνολικός ρυθμός άφιξης

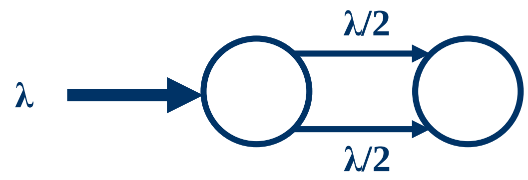
Δίκτυα Ουρών

Ποιότητα της «Προσέγγισης Ανεξαρτησίας»

- Αρκετά καλή για πυκνά διασυνδεδεμένα δίκτυα και μέτριο προς βαρύ φορτίο.
- Καλή για εφαρμογές που η ακρίβεια πρόβλεψης δεν είναι πολύ σημαντική.
- Χρήσιμη για υπολογισμούς τοπολογικού σχεδιασμού, ως συμπλήρωμα σε προσομοιώσεις κλπ.

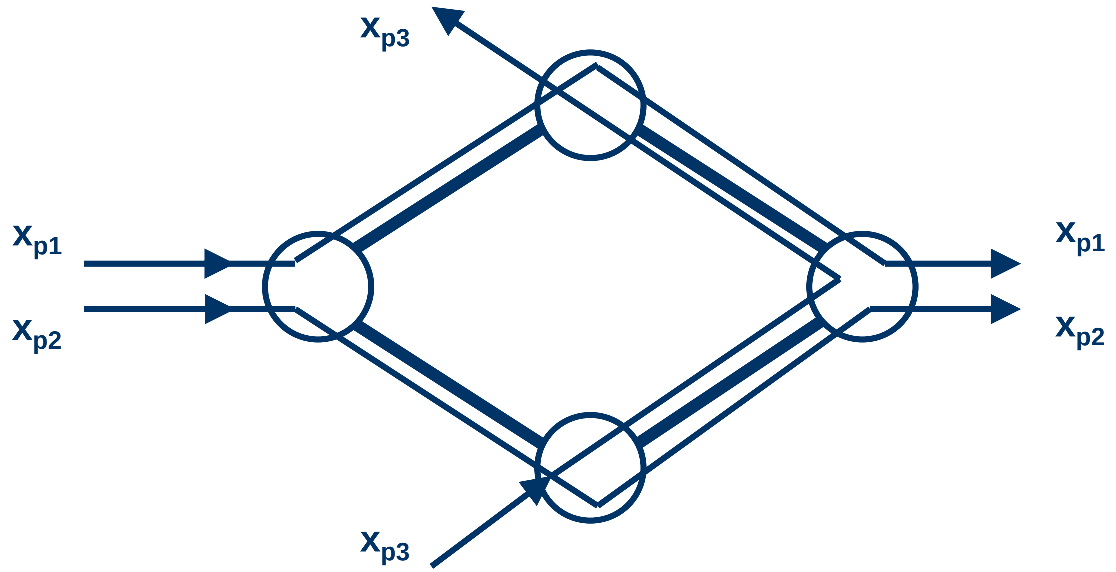
Δίκτυα Ουρών

<u>Παράδειγμα</u> όπου η Προσέγγιση του Kleinrock δεν είναι καλή



- Ροή πακέτων Poisson διαχωρίζεται σε δύο ίσης χωρητικότητας ζεύξεις.
- Εάν το αφικνούμενο πακέτο τοποθετείται στην μικρότερη ουρά, το σύστημα συμπεριφέρεται ως μία ουρά M/M/2 με ρυθμό λ.
- Η προσέγγιση ανεξαρτησίας λέει ότι κάθε ουρά συμπεριφέρεται ως M/M/1 με ρυθμό $\lambda/2$. Λάθος εκτίμηση κατά ένα παράγοντα $(1+\rho)$.

Θεώρημα του JACKSON



Υποθέσεις:

- Αφίξεις από το εξωτερικό του δικτύου είναι Poisson.
- Σε κάθε ουρά, όλες οι ροές πακέτων έχουν την ίδια εκθετική κατανομή για τους χρόνους εξυπηρέτησης.
- Χρόνοι αφίξεων και εξυπηρετήσεων είναι **ανεξάρτητοι**.

Θεώρημα του JACKSON

Τότε:

- Η πιθανοτική κατανομή σε κατάσταση ισορροπίας του αριθμού των πελατών σε κάθε ουρά είναι η ίδια με αυτή της μεμονωμένης ουράς M/M/1.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της κατανομής και των μέσων καθυστερήσεων σε κατάσταση ισορροπίας

Αξιοσημείωτο αποτέλεσμα επειδή η συνδυασμένη διαδικασία αφίξεων σε κάθε ουρά μπορεί να μην είναι Poisson.

Τέλος Ενότητας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδεια Χρήσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Μεράκος Λάζαρος 2014. «Δίκτυα Επικοινωνιών ΙΙ. Ενότητα 2: Συστήματα Αναμονής». Έκδοση: 1.01. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://opencourses.uoa.gr/courses/DI15

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης