Υπογραμμικοί Αλγόριθμοι

Πρώτη Διάλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σχετικά με το μάθημα

- Διδάσκων: Βασίλης Νάκος
- Γραφείο: B03
- eclass: https://eclass.uoa.gr/cources/D1638
- Ώρες διδασκαλίας:
    - Τρίτη, 15.00-17.00
    - Τετάρτη, 15.00-17.00

Ζητήματα που θα δούμε.

1. Αλγόριθμοι Ροής Δεδομένων
2. Προβλήματα Επεξεργασίας Αραιών Δομών
3. Προσεγγιστική Γραμμική Άλγεβρα
4. Έλεγχος Συνδυαστικών Ιδιοτήτων

Ζητήματα που θα δούμε.

1. Αλγόριθμοι Ροής Δεδομένων
2. Προβλήματα Επεξεργασίας Αραιών Δομών
3. Προσεγγιστική Γραμμική Άλγεβρα
4. Έλεγχος Συνδυαστικών Ιδιοτήτων

Αρκετά Μαθηματικά

Ζητήματα που θα δούμε.

1. Αλγόριθμοι Ροής Δεδομένων
2. Προβλήματα Επεξεργασίας Αραιών Δομών
3. Προσεγγιστική Γραμμική Άλγεβρα
4. Έλεγχος Συνδυαστικών Ιδιοτήτων

Αρκετά Μαθηματικά και **καθόλου** προγραμματισμός.

Ζητήματα που θα δούμε.

1. Αλγόριθμοι Ροής Δεδομένων
2. Προβλήματα Επεξεργασίας Αραιών Δομών
3. Προσεγγιστική Γραμμική Άλγεβρα
4. Έλεγχος Συνδυαστικών Ιδιοτήτων

Αρκετά Μαθηματικά και **καθόλου** προγραμματισμός.

Ίσως πιο κατάλληλος τίτλος για το μάθημα θα ήταν 'Αλγόριθμοι για Μεγάλα Δεδομένα.'

Βαθμολογία

1. Δύο σειρές ασκήσεων.
2. Τελική παρουσίαση: μελέτη, κατανόηση, παρουσίαση και (αν γίνεται) επέκταση αποτελεσμάτων σε ένα άρθρο από τα αντικείμενα του μαθήματος.
3. Παρακολούθηση και συμμετοχή στο μάθημα ενθαρρύνεται.

Ένα απλό πρόβλημα μικρής μνήμης.

Θα μας έρθουν 99 αριθμοί από το 1 ως το 100 σε κάποια σειρά, ο καθένας το πολύ μία φορά.

Ένα απλό πρόβλημα μικρής μνήμης.

Θα μας έρθουν 99 αριθμοί από το 1 ως το 100 σε κάποια σειρά, ο καθένας το πολύ μία φορά. Μπορούμε να βρούμε ποιος αριθμός λείπει κρατώντας *μόνο* έναν αριθμό από το 0 ως το 5050?

Ένα απλό πρόβλημα μικρής μνήμης.

Θα μας έρθουν 99 αριθμοί από το 1 ως το 100 σε κάποια σειρά, ο καθένας το πολύ μία φορά. Μπορούμε να βρούμε ποιος αριθμός λείπει κρατώντας *μόνο* έναν αριθμό από το 0 ως το 5050?

Απάντηση: Κρατάμε το άθροισμα των αριθμών που έχουμε δει, έστω S.

Ένα απλό πρόβλημα μικρής μνήμης.

Θα μας έρθουν 99 αριθμοί από το 1 ως το 100 σε κάποια σειρά, ο καθένας το πολύ μία φορά. Μπορούμε να βρούμε ποιος αριθμός λείπει κρατώντας *μόνο* έναν αριθμό από το 0 ως το 5050?

Απάντηση: Κρατάμε το άθροισμα των αριθμών που έχουμε δει, έστω S. Ξέρουμε ότι $1 + 2 + \ldots + 100 = 100 \cdot 101/2 = 5050$ και για να βρούμε ποιος αριθμός λείπει απλά κάνουμε

$$5050 - S.$$

Πιο δύσκολο πρόβλημα.

Έστω ότι έχουμε μόνο μια σελίδα $A4$, ένα μολύβι και μια γόμα και βρισκόμαστε μπροστα από μία βιβλιοθήκη με όλα τα έργα του Τζ.Ρ.Ρ. Τόλκιν. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των *διαφορετικών* λέξεων οι οποίες εμφανίζονται στη συνολικη εργογραφία του Τόλκιν χρησιμοποιώντας ως καταγραφικό μέσο μόνο τη σελίδα $A4$?

Πιο δύσκολο πρόβλημα.

Έστω ότι έχουμε μόνο μια σελίδα $A4$, ένα μολύβι και μια γόμα και βρισκόμαστε μπροστα από μία βιβλιοθήκη με όλα τα έργα του Τζ.Ρ.Ρ. Τόλκιν. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των *διαφορετικών* λέξεων οι οποίες εμφανίζονται στη συνολικη εργογραφία του Τόλκιν χρησιμοποιώντας ως καταγραφικό μέσο μόνο τη σελίδα $A4$?

Μοντελοποίηση: Βλέπουμε μια ακολουθία από λέξεις $x_1, x_2, \ldots, x_m$ και θέλουμε να κρατήσουμε μια δομή δεδομένων η οποία χρησιμοποιεί χώρο S και επιτρέπει δύο πράξεις:

Πιο δύσκολο πρόβλημα.

Έστω ότι έχουμε μόνο μια σελίδα $A4$, ένα μολύβι και μια γόμα και βρισκόμαστε μπροστα από μία βιβλιοθήκη με όλα τα έργα του Τζ.Ρ.Ρ. Τόλκιν. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των *διαφορετικών* λέξεων οι οποίες εμφανίζονται στη συνολικη εργογραφία του Τόλκιν χρησιμοποιώντας ως καταγραφικό μέσο μόνο τη σελίδα $A4$?

Μοντελοποίηση: Βλέπουμε μια ακολουθία από λέξεις $x_1, x_2, \ldots, x_m$ και θέλουμε να κρατήσουμε μια δομή δεδομένων η οποία χρησιμοποιεί χώρο S και επιτρέπει δύο πράξεις:

- Ανανέωση όποτε διαβάζουμε μια νέα λέξη.
- Ερώτηση, όπου η απάντηση είναι το πλήθος των *διαφορετικών* λέξεων οι οποίες έχουν εμφανιστεί.

Πιο δύσκολο πρόβλημα.

Έστω ότι έχουμε μόνο μια σελίδα $A4$, ένα μολύβι και μια γόμα και βρισκόμαστε μπροστα από μία βιβλιοθήκη με όλα τα έργα του Τζ.Ρ.Ρ. Τόλκιν. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των *διαφορετικών* λέξεων οι οποίες εμφανίζονται στη συνολικη εργογραφία του Τόλκιν χρησιμοποιώντας ως καταγραφικό μέσο μόνο τη σελίδα $A4$?

Μοντελοποίηση: Βλέπουμε μια ακολουθία από λέξεις $x_1, x_2, \ldots, x_m$ και θέλουμε να κρατήσουμε μια δομή δεδομένων η οποία χρησιμοποιεί χώρο S και επιτρέπει δύο πράξεις:

- Ανανέωση όποτε διαβάζουμε μια νέα λέξη.
- Ερώτηση, όπου η απάντηση είναι το πλήθος των *διαφορετικών* λέξεων οι οποίες έχουν εμφανιστεί.

Παράδειγμα: Στην πρόταση 'Μπορεί να έρθει μια μέρα που το κουράγιο των ανθρώπων θα αποτύχει, αλλά δεν είναι αυτή η μέρα.' έχουμε **17** διαφορετικές λέξεις.

Απάντηση.

Δυστυχώς, η απάντηση είναι **όχι**.

Απάντηση.

Δυστυχώς, η απάντηση είναι **όχι**.

Μπορεί όμως να είναι **ΝΑΙ** αν επιτρέψουμε τα ακόλουθα:

1. Η απάντηση είναι προσεγγιστική, δηλαδή επιστρέφεται ένας αριθμός ο οποίος είναι *περίπου* ο ίδιος με το πλήθος των διαφορετικών λέξεων.

Απάντηση.

Δυστυχώς, η απάντηση είναι **όχι**.

Μπορεί όμως να είναι **ΝΑΙ** αν επιτρέψουμε τα ακόλουθα:

1. Η απάντηση είναι προσεγγιστική, δηλαδή επιστρέφεται ένας αριθμός ο οποίος είναι *περίπου* ο ίδιος με το πλήθος των διαφορετικών λέξεων.
2. Η δομή δεδομένων είναι πιθανοτική, δηλαδή επιτρέπεται να επιστρέφει λάθος αποτέλεσμα με κάποια πιθανότητα $< 1/2$.

Απάντηση.

Δυστυχώς, η απάντηση είναι **όχι**.

Μπορεί όμως να είναι **ΝΑΙ** αν επιτρέψουμε τα ακόλουθα:

1. Η απάντηση είναι προσεγγιστική, δηλαδή επιστρέφεται ένας αριθμός ο οποίος είναι *περίπου* ο ίδιος με το πλήθος των διαφορετικών λέξεων.
2. Η δομή δεδομένων είναι πιθανοτική, δηλαδή επιτρέπεται να επιστρέφει λάθος αποτέλεσμα με κάποια πιθανότητα $< 1/2$.

Θα τα δούμε όλα τα παραπάνω στο μάθημα.

Πιθανοτικά Εργαλεία

Έστω μια *διακριτή* τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots$.

Πιθανοτικά Εργαλεία

Έστω μια *διακριτή* τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots$.

⋆ Η μέση/ αναμενόμενη τιμή ισούται με $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot Pr[X = x_i]$.

Πιθανοτικά Εργαλεία

Έστω μια *διακριτή* τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots$.

$\star$ Η μέση/ αναμενόμενη τιμή ισούται με $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot Pr[X = x_i]$.

Ισχύει ότι

- Γραμμικότητα Μέσης Τιμής: $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Πιθανοτικά Εργαλεία

Έστω μια *διακριτή* τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots$.

$\star$ Η μέση/ αναμενόμενη τιμή ισούται με $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot Pr[X = x_i]$.

Ισχύει ότι

- Γραμμικότητα Μέσης Τιμής: $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[cX] = c \cdot E[X]$ με $c \in \mathbb{R}$.

Πιθανοτικά Εργαλεία

Έστω μια *διακριτή* τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τιμές $x_1, x_2, \ldots$.

$\star$ Η μέση/ αναμενόμενη τιμή ισούται με $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot Pr[X = x_i]$.

Ισχύει ότι

- Γραμμικότητα Μέσης Τιμής: $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[cX] = c \cdot E[X]$ με $c \in \mathbb{R}$.
- (χρήσιμο) αν $x_i \geq 0$ για κάθε i έχουμε $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$.

Διακύμανση

Ορίζουμε τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X ως

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Διακύμανση

Ορίζουμε τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X ως

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Διακύμανση

Ορίζουμε τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X ως

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$\star$ Ισχύει ότι $Var(cX) = c^2Var(X)$ με $c \in \mathbb{R}$

Διακύμανση

Ορίζουμε τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X ως

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

⋆ Ισχύει ότι $Var(cX) = c^2 Var(X)$ με $c \in \mathbb{R}$
και όταν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι **ανεξάρτητες** έχουμε

$$Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n).$$

Διακύμανση

Ορίζουμε τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X ως

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

⋆ Ισχύει ότι $Var(cX) = c^2 Var(X)$ με $c \in \mathbb{R}$
και όταν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι **ανεξάρτητες** έχουμε

$$Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n).$$

Η τυπική απόκλιση της X είναι η $\sigma(X) := \sqrt{Var(X)}$.

Ανεξαρτησία Τυχαίων Μεταβλητών.

⋆ Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε x, y έχουμε

$$Pr[X = x \text{ and } Y = y] = Pr[X = x] \cdot Pr[Y = y].$$

Ανεξαρτησία Τυχαίων Μεταβλητών.

⋆ Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε x, y έχουμε

$$Pr[X = x \text{ and } Y = y] = Pr[X = x] \cdot Pr[Y = y].$$

⋆ Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι (αμοιβαίως) ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έχουμε

$$Pr[X_1 = x_1 \text{ and } X_2 = x_2 \text{ and } \ldots\ X_n = x_n] = Pr[X_1 = x_1] \cdot Pr[X_2 = x_2] \cdot \ldots$$

Ανεξαρτησία Τυχαίων Μεταβλητών.

⋆ Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε x, y έχουμε

$$Pr[X = x \text{ and } Y = y] = Pr[X = x] \cdot Pr[Y = y].$$

⋆ Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι (αμοιβαίως) ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έχουμε

$$Pr[X_1 = x_1 \text{ and } X_2 = x_2 \text{ and } \ldots\ X_n = x_n] = Pr[X_1 = x_1] \cdot Pr[X_2 = x_2] \cdot \ldots$$

⋆ Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι **ανά δύο** ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε x_i, x_j έχουμε

$$Pr[X_i = x_i \text{ and } X_j = x_j] = Pr[X_i = x_i] \cdot Pr[X_j = x_j].$$

Φράγμα Ένωσης

Έστω $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας. Τότε

$$Pr[E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \ldots\ E_n] \leq Pr[E_1] + Pr[E_2] + \ldots + Pr[E_n].$$

Φράγμα Ένωσης

Έστω $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας. Τότε

$$Pr[E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \ldots\ E_n] \leq Pr[E_1] + Pr[E_2] + \ldots + Pr[E_n].$$

Παράδειγμα: Έστω ότι είχαμε μια δομή δεδομένων που λύνει το πρόβλημα των διακριτών λέξεων με πιθανότητα επιτυχίας $9/10$. Τότε, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα των διακριτών λέξεων και για τον Τόλκιν και για τον Σαίξπηρ και για τον Όμηρο **ταυτόχρονα** με πιθανότητα $7/10$.

Φράγμα Ένωσης

Έστω $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας. Τότε

$$Pr[E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \ldots\ E_n] \leq Pr[E_1] + Pr[E_2] + \ldots + Pr[E_n].$$

Παράδειγμα: Έστω ότι είχαμε μια δομή δεδομένων που λύνει το πρόβλημα των διακριτών λέξεων με πιθανότητα επιτυχίας $9/10$. Τότε, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα των διακριτών λέξεων και για τον Τόλκιν και για τον Σαίξπηρ και για τον Όμηρο **ταυτόχρονα** με πιθανότητα $7/10$.
$\star$ Έστω E_1, E_2, E_3 τα ενδεχόμενα η δομή να βγάλει λάθος απάντηση στον Τόλκιν, Σαίξπηρ, Όμηρο αντίστοιχα.

Φράγμα Ένωσης

Έστω $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας. Τότε

$$Pr[E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \ldots E_n] \leq Pr[E_1] + Pr[E_2] + \ldots + Pr[E_n].$$

Παράδειγμα: Έστω ότι είχαμε μια δομή δεδομένων που λύνει το πρόβλημα των διακριτών λέξεων με πιθανότητα επιτυχίας $9/10$. Τότε, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα των διακριτών λέξεων και για τον Τόλκιν και για τον Σαίξπηρ και για τον Όμηρο **ταυτόχρονα** με πιθανότητα $7/10$.

$\star$ Έστω E_1, E_2, E_3 τα ενδεχόμενα η δομή να βγάλει λάθος απάντηση στον Τόλκιν, Σαίξπηρ, Όμηρο αντίστοιχα.

Τότε η πιθανότητα να βγάλει λάθος απάντηση σε τουλάχιστον έναν από τους τρεις ισούται με

Φράγμα Ένωσης

Έστω $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας. Τότε

$$Pr[E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \ \ldots \ E_n] \leq Pr[E_1] + Pr[E_2] + \ldots + Pr[E_n].$$

Παράδειγμα: Έστω ότι είχαμε μια δομή δεδομένων που λύνει το πρόβλημα των διακριτών λέξεων με πιθανότητα επιτυχίας $9/10$. Τότε, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα των διακριτών λέξεων και για τον Τόλκιν και για τον Σαίξπηρ και για τον Όμηρο **ταυτόχρονα** με πιθανότητα $7/10$.

$\star$ Έστω E_1, E_2, E_3 τα ενδεχόμενα η δομή να βγάλει λάθος απάντηση στον Τόλκιν, Σαίξπηρ, Όμηρο αντίστοιχα.

Τότε η πιθανότητα να βγάλει λάθος απάντηση σε τουλάχιστον έναν από τους τρεις ισούται με

$$Pr[E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } E_3] \leq Pr[E_1] + Pr[E_2] + Pr[E_3] \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

Φράγμα Ένωσης

Έστω $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας. Τότε

$$Pr[E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } \ldots E_n] \leq Pr[E_1] + Pr[E_2] + \ldots + Pr[E_n].$$

Παράδειγμα: Έστω ότι είχαμε μια δομή δεδομένων που λύνει το πρόβλημα των διακριτών λέξεων με πιθανότητα επιτυχίας $9/10$. Τότε, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα των διακριτών λέξεων και για τον Τόλκιν και για τον Σαίξπηρ και για τον Όμηρο **ταυτόχρονα** με πιθανότητα $7/10$.

$\star$ Έστω E_1, E_2, E_3 τα ενδεχόμενα η δομή να βγάλει λάθος απάντηση στον Τόλκιν, Σαίξπηρ, Όμηρο αντίστοιχα.

Τότε η πιθανότητα να βγάλει λάθος απάντηση σε τουλάχιστον έναν από τους τρεις ισούται με

$$Pr[E_1 \text{ or } E_2 \text{ or } E_3] \leq Pr[E_1] + Pr[E_2] + Pr[E_3] \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

άρα η πιθανότητα να είναι σωστή **και για τους τρεις** ισούται με $7/10$.

Αν έχουμε τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τότε έχουμε

Αναμενόμενη τιμή και Διακύμανση: μία διάκριση

Αν έχουμε τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τότε έχουμε

$$E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$$

ακόμη και αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι απόλυτα εξαρτημένες,

Αναμενόμενη τιμή και Διακύμανση: μία διάκριση

Αν έχουμε τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τότε έχουμε

$$E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$$

ακόμη και αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι απόλυτα εξαρτημένες, ενώ

$$Var[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = Var[X_1] + Var[X_2] + \ldots + Var[X_n]$$

μόνο όταν οι μεταβλητές είναι **ανά δύο** ανεξάρτητες.

Προσεγγιστική Μέτρηση: Αλγόριθμος του Morris

Θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν μετρητή που μετράει από το 0 ως το n.
Μπορούμε να το κάνουμε χρησιμοποιώντας λιγότερα από $\log n$ bits ?

Προσεγγιστική Μέτρηση: Αλγόριθμος του Morris

Θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν μετρητή που μετράει από το 0 ως το n. Μπορούμε να το κάνουμε χρησιμοποιώντας λιγότερα από $\log n$ bits ? **Μόνο** αν επιτρέψουμε προσεγγιστικές απαντήσεις και πιθανότητα λάθους.

Προσεγγιστική Μέτρηση: Αλγόριθμος του Morris

Θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν μετρητή που μετράει από το 0 ως το n. Μπορούμε να το κάνουμε χρησιμοποιώντας λιγότερα από $\log n$ bits ? **Μόνο** αν επιτρέψουμε προσεγγιστικές απαντήσεις και πιθανότητα λάθους.

$\star$ Πρόβλημα: Ένα κουμπί θα πατηθεί t φορές $0 \leq t \leq n$. Ειδοποιείστε όποτε αυτό συμβαίνει, αλλά και την τελευταία φορά που πατιέται.

Προσεγγιστική Μέτρηση: Αλγόριθμος του Morris

Θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν μετρητή που μετράει από το 0 ως το n. Μπορούμε να το κάνουμε χρησιμοποιώντας λιγότερα από $\log n$ bits ? **Μόνο** αν επιτρέψουμε προσεγγιστικές απαντήσεις και πιθανότητα λάθους.

$\star$ Πρόβλημα: Ένα κουμπί θα πατηθεί t φορές $0 \leq t \leq n$. Ειδοποιείστε όποτε αυτό συμβαίνει, αλλά και την τελευταία φορά που πατιέται. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος βρίσκει μια τιμή $\widetilde{t}$ ώστε

$$(1-\epsilon)t \leq \widetilde{t} \leq (1+\epsilon)t$$

με πιθανότητα $2/3$.

Προσεγγιστική Μέτρηση: Αλγόριθμος του Morris

Θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν μετρητή που μετράει από το 0 ως το n. Μπορούμε να το κάνουμε χρησιμοποιώντας λιγότερα από $\log n$ bits ? **Μόνο** αν επιτρέψουμε προσεγγιστικές απαντήσεις και πιθανότητα λάθους.

⋆ Πρόβλημα: Ένα κουμπί θα πατηθεί t φορές $0 \leq t \leq n$. Ειδοποιείστε όποτε αυτό συμβαίνει, αλλά και την τελευταία φορά που πατιέται. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος βρίσκει μια τιμή $\widetilde{t}$ ώστε

$$(1-\epsilon)t \leq \widetilde{t} \leq (1+\epsilon)t$$

με πιθανότητα $2/3$.

Απάντηση: Γίνεται χρησιμοποιώντας $O(\log \log n / \epsilon^2)$ bits.

Μια πρώτη προσπάθεια.

Διατηρούμε έναν μετρητή X (η τιμή του είναι τυχαία μεταβλητή) ώστε

Μια πρώτη προσπάθεια.

Διατηρούμε έναν μετρητή X (η τιμή του είναι τυχαία μεταβλητή) ώστε

- X αρχικοποιείται στο 0.
- Όταν ειδοποιούμαστε ότι το κουμπί πατιέται αυξάνουμε το X κατά 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.

Μια πρώτη προσπάθεια.

Διατηρούμε έναν μετρητή X (η τιμή του είναι τυχαία μεταβλητή) ώστε

- X αρχικοποιείται στο 0.
- Όταν ειδοποιούμαστε ότι το κουμπί πατιέται αυξάνουμε το X κατά 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.
- Στο τέλος δίνουμε σαν απάντηση το $2^X - 1$.

Μια πρώτη προσπάθεια.

Διατηρούμε έναν μετρητή X (η τιμή του είναι τυχαία μεταβλητή) ώστε

- X αρχικοποιείται στο 0.
- Όταν ειδοποιούμαστε ότι το κουμπί πατιέται αυξάνουμε το X κατά 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.
- Στο τέλος δίνουμε σαν απάντηση το $2^X - 1$.

Βασική ιδέα: Για να μάθουμε προσεγγιστικά τον αριθμό αρκεί να μάθουμε προσεγγιστικά τα πιο σημαντικά του bits.

Μια πρώτη προσπάθεια.

Διατηρούμε έναν μετρητή X (η τιμή του είναι τυχαία μεταβλητή) ώστε

- X αρχικοποιείται στο 0.
- Όταν ειδοποιούμαστε ότι το κουμπί πατιέται αυξάνουμε το X κατά 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2^X}$.
- Στο τέλος δίνουμε σαν απάντηση το $2^X - 1$.

Βασική ιδέα: Για να μάθουμε προσεγγιστικά τον αριθμό αρκεί να μάθουμε προσεγγιστικά τα πιο σημαντικά του bits.

Ισχυρισμός: Στο τέλος, έχουμε $E[2^X] = t + 1$.

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Ισχυρισμός: Αν το κουμπί έχει χτυπήσει i φορές τότε έχουμε $E[2^X] = i + 1$.

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Ισχυρισμός: Αν το κουμπί έχει χτυπήσει i φορές τότε έχουμε $E[2^X] = i + 1$.

Έστω X_i η τιμή του μετρητή αφού έχει χτυπήσει i φορές το κουμπί.

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Ισχυρισμός: Αν το κουμπί έχει χτυπήσει i φορές τότε έχουμε $E[2^X] = i + 1$.

Έστω X_i η τιμή του μετρητή αφού έχει χτυπήσει i φορές το κουμπί.

$$E[2^{X_i}] = \sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot E[2^{X_i} | X_{i-1} = j] =$$

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Ισχυρισμός: Αν το κουμπί έχει χτυπήσει i φορές τότε έχουμε $E[2^X] = i + 1$.
Έστω X_i η τιμή του μετρητή αφού έχει χτυπήσει i φορές το κουμπί.

$$E[2^{X_i}] = \sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot E[2^{X_i} | X_{i-1} = j] =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot \left(\frac{1}{2^j} \cdot 2^{j+1} + (1 - \frac{1}{2^j}) 2^j \right) =$$

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Ισχυρισμός: Αν το κουμπί έχει χτυπήσει i φορές τότε έχουμε $E[2^X] = i + 1$.

Έστω X_i η τιμή του μετρητή αφού έχει χτυπήσει i φορές το κουμπί.

$$E[2^{X_i}] = \sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot E[2^{X_i} | X_{i-1} = j] =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot \left(\frac{1}{2^j} \cdot 2^{j+1} + (1 - \frac{1}{2^j}) 2^j \right) =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot (2^j + 1) = 1 + E[2^{X_{i-1}}]$$

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Ισχυρισμός: Αν το κουμπί έχει χτυπήσει i φορές τότε έχουμε $E[2^X] = i + 1$.
Έστω X_i η τιμή του μετρητή αφού έχει χτυπήσει i φορές το κουμπί.

$$E[2^{X_i}] = \sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot E[2^{X_i} | X_{i-1} = j] =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot \left(\frac{1}{2^j} \cdot 2^{j+1} + (1 - \frac{1}{2^j}) 2^j \right) =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} Pr[X_{i-1} = j] \cdot (2^j + 1) = 1 + E[2^{X_{i-1}}]$$

Έχουμε εκφράσει αναδρομικά το $E[2^{X_i}]$ ως συνάρτηση του $E[2^{X_{i-1}}]$ και με επαγωγή παίρνουμε το ζητούμενο!

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $E[2^{2X}] = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$,

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $E[2^{2X}] = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$,
και άρα $Var(2^X) = E[2^{2X}] - (E[X])^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $E[2^{2X}] = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$,
και άρα $Var(2^X) = E[2^{2X}] - (E[X])^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

Άρα έχουμε $E[2^X] = t + 1$ και $Var(2^X) = \Omega(t^2)$. Είναι επαρκές ?

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $E[2^{2X}] = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$,
και άρα $Var(2^X) = E[2^{2X}] - (E[X])^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

Άρα έχουμε $E[2^X] = t + 1$ και $Var(2^X) = \Omega(t^2)$. Είναι επαρκές ?

Ανισότητα **Chebyshev**.
Για μια τυχαία μεταβλητή Z έχουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \lambda] \leq \frac{Var(Z)}{\lambda^2}$$

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $E[2^{2X}] = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$,
και άρα $Var(2^X) = E[2^{2X}] - (E[X])^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

Άρα έχουμε $E[2^X] = t + 1$ και $Var(2^X) = \Omega(t^2)$. Είναι επαρκές ?

Ανισότητα **Chebyshev**.
Για μια τυχαία μεταβλητή Z έχουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \lambda] \leq \frac{Var(Z)}{\lambda^2}$$

Στην περίπτωση μας,
$Z := 2^X, E[Z] = t + 1, Var(Z) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}, \lambda = \epsilon \cdot E[Z]$ και άρα

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $E[2^{2X}] = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$,
και άρα $Var(2^X) = E[2^{2X}] - (E[X])^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

Άρα έχουμε $E[2^X] = t + 1$ και $Var(2^X) = \Omega(t^2)$. Είναι επαρκές ?

Ανισότητα **Chebyshev**.
Για μια τυχαία μεταβλητή Z έχουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \lambda] \leq \frac{Var(Z)}{\lambda^2}$$

Στην περίπτωση μας,
$Z := 2^X, E[Z] = t + 1, Var(Z) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}, \lambda = \epsilon \cdot E[Z]$ και άρα

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon E[Z]] \leq \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}}{\epsilon^2 \cdot (t+1)^2} = \Omega(\frac{1}{\epsilon^2})$$

Ανάλυση πρώτης προσπάθειας.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι $E[2^{2X}] = \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$,
και άρα $Var(2^X) = E[2^{2X}] - (E[X])^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}$.

Άρα έχουμε $E[2^X] = t + 1$ και $Var(2^X) = \Omega(t^2)$. Είναι επαρκές ?

Ανισότητα **Chebyshev**.
Για μια τυχαία μεταβλητή Z έχουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \lambda] \leq \frac{Var(Z)}{\lambda^2}$$

Στην περίπτωση μας,
$Z := 2^X, E[Z] = t + 1, Var(Z) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}, \lambda = \epsilon \cdot E[Z]$ και άρα

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon E[Z]] \leq \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}}{\epsilon^2 \cdot (t+1)^2} = \Omega(\frac{1}{\epsilon^2}) \quad : -($$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Το πρόβλημα είναι ότι με έναν μετρητή είχαμε πολύ μεγάλη διακύμανση. Πως μπορούμε να το βελτιώσουμε?

Ενίσχυση Διακύμανσης

Το πρόβλημα είναι ότι με έναν μετρητή είχαμε πολύ μεγάλη διακύμανση. Πως μπορούμε να το βελτιώσουμε?

Παίρνουμε R μετρητές $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(R)}$ και κοιτάμε τη μεταβλητή $Z := \frac{1}{R}\left(\underbrace{2^{X^{(1)}}}_{Z_1} + \ldots + \underbrace{2^{(X^{(R)})}}_{Z_R}\right)$.

Ενίσχυση Διακύμανσης

Το πρόβλημα είναι ότι με έναν μετρητή είχαμε πολύ μεγάλη διακύμανση. Πως μπορούμε να το βελτιώσουμε?

Παίρνουμε R μετρητές $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(R)}$ και κοιτάμε τη μεταβλητή

$$Z := \frac{1}{R}\left(\underbrace{2^{X^{(1)}}}_{Z_1} + \ldots + \underbrace{2^{(X^{(R)})}}_{Z_R}\right).$$

Τότε η μέση τιμή μένει **ίδια**, $E[Z] = t + 1$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Το πρόβλημα είναι ότι με έναν μετρητή είχαμε πολύ μεγάλη διακύμανση. Πως μπορούμε να το βελτιώσουμε?

Παίρνουμε R μετρητές $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(R)}$ και κοιτάμε τη μεταβλητή

$$Z := \frac{1}{R}\left(\underbrace{2^{X^{(1)}}}_{Z_1} + \ldots + \underbrace{2^{(X^{(R)})}}_{Z_R}\right).$$

Τότε η μέση τιμή μένει **ίδια**, $E[Z] = t + 1$ αλλά η διακύμανση πέφτει πολύ!

Ενίσχυση Διακύμανσης

Το πρόβλημα είναι ότι με έναν μετρητή είχαμε πολύ μεγάλη διακύμανση. Πως μπορούμε να το βελτιώσουμε?

Παίρνουμε R μετρητές $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(R)}$ και κοιτάμε τη μεταβλητή
$Z := \frac{1}{R}\left(\underbrace{2^{X^{(1)}}}_{Z_1} + \ldots + \underbrace{2^{(X^{(R)})}}_{Z_R}\right)$.

Τότε η μέση τιμή μένει **ίδια**, $E[Z] = t + 1$ αλλά η διακύμανση πέφτει πολύ!

$$Var(Z) = Var(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Z_i) =$$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Το πρόβλημα είναι ότι με έναν μετρητή είχαμε πολύ μεγάλη διακύμανση. Πως μπορούμε να το βελτιώσουμε?

Παίρνουμε R μετρητές $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(R)}$ και κοιτάμε τη μεταβλητή $Z := \frac{1}{R}\left(\underbrace{2^{X^{(1)}}}_{Z_1} + \ldots + \underbrace{2^{(X^{(R)})}}_{Z_R}\right)$.

Τότε η μέση τιμή μένει **ίδια**, $E[Z] = t + 1$ αλλά η διακύμανση πέφτει πολύ!

$$Var(Z) = Var(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Z_i) = \frac{1}{R^2} \cdot Var(\sum_{i=1}^{R} Z_i) =$$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Το πρόβλημα είναι ότι με έναν μετρητή είχαμε πολύ μεγάλη διακύμανση. Πως μπορούμε να το βελτιώσουμε?

Παίρνουμε R μετρητές $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(R)}$ και κοιτάμε τη μεταβλητή $Z := \frac{1}{R}\left(\underbrace{2^{X^{(1)}}}_{Z_1} + \ldots + \underbrace{2^{(X^{(R)})}}_{Z_R}\right)$.

Τότε η μέση τιμή μένει **ίδια**, $E[Z] = t + 1$ αλλά η διακύμανση πέφτει πολύ!

$$Var(Z) = Var(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Z_i) = \frac{1}{R^2} \cdot Var(\sum_{i=1}^{R} Z_i) = \frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^{R} Var(Z_i) \approx \frac{t^2}{R}$$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Οπότε αν εφαρμόσουμε ανισότητα Chebyshev στη νέα τυχαία μεταβλητή Z θα πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \frac{Var(Z)}{\epsilon^2 \cdot (E[Z])^2} = O\left(\frac{1}{R\epsilon^2}\right)$$

Ενίσχυση Διακύμανσης

Οπότε αν εφαρμόσουμε ανισότητα Chebyshev στη νέα τυχαία μεταβλητή Z θα πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \frac{Var(Z)}{\epsilon^2 \cdot (E[Z])^2} = O\left(\frac{1}{R\epsilon^2}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορώ να θέσω $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$ ώστε το δεξί μέλος να γίνει το πολύ $\frac{1}{10}$.

Ενίσχυση Διακύμανσης

Οπότε αν εφαρμόσουμε ανισότητα Chebyshev στη νέα τυχαία μεταβλητή Z θα πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \frac{Var(Z)}{\epsilon^2 \cdot (E[Z])^2} = O\left(\frac{1}{R\epsilon^2}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορώ να θέσω $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$ ώστε το δεξί μέλος να γίνει το πολύ $\frac{1}{10}$.Η μέση τιμή των R μετρητών με πιθανότητα $\frac{1}{10}$ είναι σωστή! Προσοχή, ότι κρίσιμα η $E[Z]$ δεν αλλάζει, μόνο η διακύμανση αλλάζει.

Ενίσχυση Διακύμανσης

Οπότε αν εφαρμόσουμε ανισότητα Chebyshev στη νέα τυχαία μεταβλητή Z θα πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \frac{Var(Z)}{\epsilon^2 \cdot (E[Z])^2} = O\left(\frac{1}{R\epsilon^2}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορώ να θέσω $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$ ώστε το δεξί μέλος να γίνει το πολύ $\frac{1}{10}$.Η μέση τιμή των R μετρητών με πιθανότητα $\frac{1}{10}$ είναι σωστή! Προσοχή, ότι κρίσιμα η $E[Z]$ δεν αλλάζει, μόνο η διακύμανση αλλάζει.

Συνολικός χώρος για $R = \Theta(\frac{1}{\epsilon^2})$ μετρητές με τον καθένα να έχει $O(\log \log n)$ bits:

$$O\left(\frac{\log \log n}{\epsilon^2}\right)$$

Πιθανότητα επιτυχίας.

Αν θέλουμε πιθανότητα επιτυχίας $1-\delta$ μπορούμε να θέσουμε $R = \frac{1}{\epsilon^2 \cdot \delta}$ και να πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \delta,$$

Πιθανότητα επιτυχίας.

Αν θέλουμε πιθανότητα επιτυχίας $1 - \delta$ μπορούμε να θέσουμε $R = \frac{1}{\epsilon^2 \cdot \delta}$ και να πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \delta,$$

για χώρο $O(\log \log n/(\epsilon^2 \cdot \delta))$.

Πιθανότητα επιτυχίας.

Αν θέλουμε πιθανότητα επιτυχίας $1 - \delta$ μπορούμε να θέσουμε $R = \frac{1}{\epsilon^2 \cdot \delta}$ και να πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \delta,$$

για χώρο $O(\log \log n/(\epsilon^2 \cdot \delta))$. Μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο ?

Πιθανότητα επιτυχίας.

Αν θέλουμε πιθανότητα επιτυχίας $1-\delta$ μπορούμε να θέσουμε $R = \frac{1}{\epsilon^2 \cdot \delta}$ και να πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \delta,$$

για χώρο $O(\log\log n/(\epsilon^2 \cdot \delta))$. Μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο ?

$\star$ Φράγμα Chernoff: Έστω **ανεξάρτητες** τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_m \in [0,1]$ με $X := \sum_{i=1}^{m} X_i$. Τότε για $0 < \zeta < 1$ έχουμε

$$Pr[|X - E[X]| > \zeta E[X]] \leq 2e^{-\zeta^2 \cdot E[X]/3}$$

Πιθανότητα επιτυχίας.

Αν θέλουμε πιθανότητα επιτυχίας $1-\delta$ μπορούμε να θέσουμε $R = \frac{1}{\epsilon^2 \cdot \delta}$ και να πάρουμε

$$Pr[|Z - E[Z]| \geq \epsilon \cdot E[Z]] \leq \delta,$$

για χώρο $O(\log\log n/(\epsilon^2 \cdot \delta))$. Μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο ?

⋆ Φράγμα Chernoff: Έστω **ανεξάρτητες** τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_m \in [0,1]$ με $X := \sum_{i=1}^{m} X_i$. Τότε για $0 < \zeta < 1$ έχουμε

$$Pr[|X - E[X]| > \zeta E[X]] \leq 2e^{-\zeta^2 \cdot E[X]/3}.$$

Διαίσθηση: Το άθροισμα m φραγμένων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών συγκεντρώνεται πολύ καλύτερα.

Ενίσχυση πιθανότητας επιτυχίας

Παίρνουμε $m = O(\log(1/\delta))$ διαφορετικά στιγμιότυπα του αλγόριθμου του Morris με πιθανότητα λάθους $\leq 1/3$, τα τρέχουμε όλα και παίρνουμε τη **διάμεσο** των απαντήσεων.

Ενίσχυση πιθανότητας επιτυχίας

Παίρνουμε $m = O(\log(1/\delta))$ διαφορετικά στιγμιότυπα του αλγόριθμου του Morris με πιθανότητα λάθους $\leq 1/3$, τα τρέχουμε όλα και παίρνουμε τη **διάμεσο** των απαντήσεων.

$\star$ Ανάλυση: Έστω $X_i \in \{0, 1\}$ η τυχαία μεταβλητή που καθορίζει αν το i-οστό στιγμιότυπο επέστρεψε το σωστό αποτέλεσμα:

Ενίσχυση πιθανότητας επιτυχίας

Παίρνουμε $m = O(\log(1/\delta))$ διαφορετικά στιγμιότυπα του αλγόριθμου του Morris με πιθανότητα λάθους $\leq 1/3$, τα τρέχουμε όλα και παίρνουμε τη **διάμεσο** των απαντήσεων.

⋆ Ανάλυση: Έστω $X_i \in \{0, 1\}$ η τυχαία μεταβλητή που καθορίζει αν το i-οστό στιγμιότυπο επέστρεψε το σωστό αποτέλεσμα: $E[X_i] \geq \frac{2}{3}$, όλες οι X_i είναι ανεξάρτητες και αρκεί **περισσότερες** από τις μισές να ισούται με 1.

Ενίσχυση πιθανότητας επιτυχίας

Παίρνουμε $m = O(\log(1/\delta))$ διαφορετικά στιγμιότυπα του αλγόριθμου του Morris με πιθανότητα λάθους $\leq 1/3$, τα τρέχουμε όλα και παίρνουμε τη **διάμεσο** των απαντήσεων.

$\star$ Ανάλυση: Έστω $X_i \in \{0,1\}$ η τυχαία μεταβλητή που καθορίζει αν το i-οστό στιγμιότυπο επέστρεψε το σωστό αποτέλεσμα: $E[X_i] \geq \frac{2}{3}$, όλες οι X_i είναι ανεξάρτητες και αρκεί **περισσότερες** από τις μισές να ισούται με 1. Εφαρμόζουμε το φράγμα Chernoff και παίρνουμε

$$Pr[|X - E[X]| > \frac{1}{3}E[X]] \leq 2e^{-\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot m} < \delta,$$

όπου $E[X] \geq \frac{2}{3}m$.

Άρα συνολικός χώρος είναι

$$O(\log\log n \cdot \log(1/\delta)/\epsilon^2)$$

Συμπεράσματα.

- Μπορούμε να φτιάξουμε έναν προσεγγιστικό μετρητή ο οποίος με πιθανότητα $1-\delta$ βρίσκει μια ϵ-προσεγγιστική λύση χρησιμοποιώντας χώρο $O\left(\frac{\log\log n \cdot \log(1/\delta)}{\epsilon^2}\right)$.

Συμπεράσματα.

- Μπορούμε να φτιάξουμε έναν προσεγγιστικό μετρητή ο οποίος με πιθανότητα $1 - \delta$ βρίσκει μια ϵ-προσεγγιστική λύση χρησιμοποιώντας χώρο $O\left(\frac{\log\log n \cdot \log(1/\delta)}{\epsilon^2}\right)$.
- Αν έχουμε ένα πείραμα με μεγάλη διακύμανση, αρκεί μόνο να το επαναλάβουμε R φορές για κάποιο κατάλληλο R και να πάρουμε το μέσο όρο των R επαναλήψεων. Οι επαναλήψεις ρίχνουν τη διακύμανση κατά έναν παράγοντα R κρατώντας τη μέση τιμή ίδια.

Συμπεράσματα.

- Μπορούμε να φτιάξουμε έναν προσεγγιστικό μετρητή ο οποίος με πιθανότητα $1 - \delta$ βρίσκει μια ϵ-προσεγγιστική λύση χρησιμοποιώντας χώρο $O\left(\frac{\log\log n \cdot \log(1/\delta)}{\epsilon^2}\right)$.
- Αν έχουμε ένα πείραμα με μεγάλη διακύμανση, αρκεί μόνο να το επαναλάβουμε R φορές για κάποιο κατάλληλο R και να πάρουμε το μέσο όρο των R επαναλήψεων. Οι επαναλήψεις ρίχνουν τη διακύμανση κατά έναν παράγοντα R κρατώντας τη μέση τιμή ίδια.
- Μπορούμε να αυξήσουμε την πιθανότητα επιτυχίας ενός πειράματος τρέχοντας το $\approx \log(1/\delta)$ φορές.
- Η δύναμη των πιθανοτήτων μας επιτρέπει να κάνουμε πολύ ενδιαφέροντα πράγματα, τα οποία δεν επιτυγχάνονται με ντετερμινιστικούς αλγόριθμους.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!