Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Όγδοη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n$ ώστε $Au = \lambda u$. Ο αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή* του A και το u *ιδιοδιάνυσμα* του A.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n$ ώστε $Au = \lambda u$. Ο αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή* του A και το u *ιδιοδιάνυσμα* του A.

1. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι n ρίζες της εξίσωσης $det(A - \lambda I) = 0$.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n$ ώστε $Au = \lambda u$. Ο αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή* του A και το u *ιδιοδιάνυσμα* του A.

1. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι n ρίζες της εξίσωσης $det(A - \lambda I) = 0$.
2. Για κάθε ιδιοτιμή λ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ο *μηδενοχώρος* του $A - \lambda I$ ώστε $\mathrm{Null}(A - \lambda I) = \{x : (A - \lambda I)x = 0\}$.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n$ ώστε $Au = \lambda u$. Ο αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή* του A και το u *ιδιοδιάνυσμα* του A.

1. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι n ρίζες της εξίσωσης $det(A - \lambda I) = 0$.
2. Για κάθε ιδιοτιμή λ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ο *μηδενοχώρος* του $A - \lambda I$ ώστε $\mathrm{Null}(A - \lambda I) = \{x : (A - \lambda I)x = 0\}$.
3. Διακριτές ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n$ ώστε $Au = \lambda u$. Ο αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή* του A και το u *ιδιοδιάνυσμα* του A.

1. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι n ρίζες της εξίσωσης $det(A - \lambda I) = 0$.
2. Για κάθε ιδιοτιμή λ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ο *μηδενοχώρος* του $A - \lambda I$ ώστε $\mathrm{Null}(A - \lambda I) = \{x : (A - \lambda I)x = 0\}$.
3. Διακριτές ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Μερικά βασικά παραδείγματα.

Λήμμα: Έστω ένα άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας. Τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{a} & b & c \\ 0 & \color{red}{d} & e \\ 0 & 0 & \color{red}{f} \end{bmatrix},$$

Μερικά βασικά παραδείγματα.

Λήμμα: Έστω ένα άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας. Τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, A - \lambda I = \begin{bmatrix} a - \lambda & b & c \\ 0 & d - \lambda & e \\ 0 & 0 & f - \lambda \end{bmatrix}$$

Μερικά βασικά παραδείγματα.

Λήμμα: Έστω ένα άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας. Τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ 0 & d-\lambda & e \\ 0 & 0 & f-\lambda \end{bmatrix},$$

άρα $det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda)(f - \lambda)$.

Μερικά βασικά παραδείγματα.

Λήμμα: Έστω ένα άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας. Τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ 0 & d-\lambda & e \\ 0 & 0 & f-\lambda \end{bmatrix},$$

άρα $det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(d-\lambda)(f-\lambda)$.

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι a, d, f.

Διαγωνιοποίησιμοι Πίνακες.

Ορισμός: Ένας πίνακας λέγεται διαγωνιοποιήσιμος όταν είναι *όμοιος* με έναν διαγώνιο πίνακα Λ, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$.

Διαγωνιοποίησιμοι Πίνακες.

Ορισμός: Ένας πίνακας λέγεται διαγωνιοποιήσιμος όταν είναι *όμοιος* με έναν διαγώνιο πίνακα Λ, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$. Ο Λ είναι ο πίνακας ο οποίος έχει στη διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A.

Διαγωνιοποίησιμοι Πίνακες.

Ορισμός: Ένας πίνακας λέγεται διαγωνιοποιήσιμος όταν είναι *όμοιος* με έναν διαγώνιο πίνακα Λ, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$. Ο Λ είναι ο πίνακας ο οποίος έχει στη διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A.

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1},$$

Διαγωνιοποίησιμοι Πίνακες.

Ορισμός: Ένας πίνακας λέγεται διαγωνιοποιήσιμος όταν είναι *όμοιος* με έναν διαγώνιο πίνακα Λ, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$. Ο Λ είναι ο πίνακας ο οποίος έχει στη διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A.

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}, P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πότε είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow AP = P\Lambda$$

Πότε είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$$

όπου P_i η i-οστή στήλη του P.

Πότε είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$$

όπου P_i η i-οστή στήλη του P.

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του P_i είναι *ιδιοδιανύσματα* του A με το καθένα να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Πότε είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$$

όπου P_i η i-οστή στήλη του P.

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του P_i είναι *ιδιοδιανύσματα* του A με το καθένα να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Όμως αντιστρεψιμότητα του P σημαίνει γραμμική ανεξαρτησία των P_i,

Πότε είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$$

όπου P_i η i-οστή στήλη του P.

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του P_i είναι *ιδιοδιανύσματα* του A με το καθένα να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Όμως αντιστρεψιμότητα του P σημαίνει γραμμική ανεξαρτησία των P_i, άρα οι στήλες του P είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.

Πότε είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$$

όπου P_i η i-οστή στήλη του P.

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του P_i είναι *ιδιοδιανύσματα* του A με το καθένα να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Όμως αντιστρεψιμότητα του P σημαίνει γραμμική ανεξαρτησία των P_i, άρα οι στήλες του P είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.
Αντίστροφα, κάθε συλλογή ιδιοδιανυσμάτων του A που αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$

Πότε είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$$

όπου P_i η i-οστή στήλη του P.

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του P_i είναι *ιδιοδιανύσματα* του A με το καθένα να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Όμως αντιστρεψιμότητα του P σημαίνει γραμμική ανεξαρτησία των P_i, άρα οι στήλες του P είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.
Αντίστροφα, κάθε συλλογή ιδιοδιανυσμάτων του A που αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$ δίνει έναν πίνακα P και άρα μία διαγωνιοποίηση του A.

Πότε είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος;

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow AP_i = \lambda_i P_i$$

όπου P_i η i-οστή στήλη του P.

Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του P_i είναι *ιδιοδιανύσματα* του A με το καθένα να αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Όμως αντιστρεψιμότητα του P σημαίνει γραμμική ανεξαρτησία των P_i, άρα οι στήλες του P είναι βάση του $\mathbb{R}^n$.
Αντίστροφα, κάθε συλλογή ιδιοδιανυσμάτων του A που αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^n$ δίνει έναν πίνακα P και άρα μία διαγωνιοποίηση του A.
Συμπερασματικά,

Θεώρημα

Ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν υπάρχει μια βάση του $\mathbb{R}^n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Έστω ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *έχει* n *διακριτές ιδιοτιμές. Τότε ο* A *είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Έστω ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές. Τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Αν οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Έστω ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές. Τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Αν οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα έχουμε n διακριτές ιδιοτιμές $\Rightarrow$

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Έστω ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές. Τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Αν οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα έχουμε n διακριτές ιδιοτιμές $\Rightarrow n$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα στον $\mathbb{R}^n$

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Έστω ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές. Τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Αν οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα έχουμε n διακριτές ιδιοτιμές $\Rightarrow n$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ άρα σχηματίζουν βάση στον $\mathbb{R}^n$

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Έστω ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει n διακριτές ιδιοτιμές. Τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Απόδειξη: Αν οι ιδιοτιμές είναι διακριτές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα έχουμε n διακριτές ιδιοτιμές $\Rightarrow n$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ άρα σχηματίζουν βάση στον $\mathbb{R}^n \Rightarrow A$ διαγωνιοποιήσιμος!

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

$\star$ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.

⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.
⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Απόδειξη του $\Rightarrow$: Αρκεί αν βρούμε ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A.

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.
⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Απόδειξη του $\Rightarrow$: Αρκεί αν βρούμε ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A. Για κάθε ιδιοτιμή λ παίρνουμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου, δηλαδή του $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$,

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.
⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Απόδειξη του $\Rightarrow$: Αρκεί αν βρούμε ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A. Για κάθε ιδιοτιμή λ παίρνουμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου, δηλαδή του $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$, και ισχυριζόμαστε ότι όλα μαζί τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.
⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Απόδειξη του $\Rightarrow$: Αρκεί αν βρούμε ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A. Για κάθε ιδιοτιμή λ παίρνουμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου, δηλαδή του $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$, και ισχυριζόμαστε ότι όλα μαζί τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διανύσματα σε άλλους ιδιοχώρους είναι γραμμικώς ανεξάρτητα).

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.
⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Απόδειξη του $\Rightarrow$: Αρκεί αν βρούμε ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A. Για κάθε ιδιοτιμή λ παίρνουμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου, δηλαδή του $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$, και ισχυριζόμαστε ότι όλα μαζί τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διανύσματα σε άλλους ιδιοχώρους είναι γραμμικώς ανεξάρτητα). Τέλος, το πλήθος τους είναι το άθροισμα όλων των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A-\lambda I)=0$.
⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A-\lambda I)$.

Απόδειξη του $\Rightarrow$: Αρκεί αν βρούμε ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A. Για κάθε ιδιοτιμή λ παίρνουμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου, δηλαδή του $\mathrm{Null}(A-\lambda I)$, και ισχυριζόμαστε ότι όλα μαζί τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διανύσματα σε άλλους ιδιοχώρους είναι γραμμικώς ανεξάρτητα). Τέλος, το πλήθος τους είναι το άθροισμα όλων των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων $=$ άθροισμα όλων των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων

Συνθήκες για διαγωνιοποιησιμότητα.

Θεώρημα

Ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος αν και μόνο αν οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής είναι ίσες.

⋆ Αλγεβρική Πολλαπλότητα της λ: πολλαπλότητα στην εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$.
⋆ Γεωμετρική Πολλαπλότητα της λ: διάσταση του χώρου $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Απόδειξη του $\Rightarrow$: Αρκεί αν βρούμε ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A. Για κάθε ιδιοτιμή λ παίρνουμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου, δηλαδή του $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$, και ισχυριζόμαστε ότι όλα μαζί τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διανύσματα σε άλλους ιδιοχώρους είναι γραμμικώς ανεξάρτητα). Τέλος, το πλήθος τους είναι το άθροισμα όλων των γεωμετρικών πολλαπλοτήτων $=$ άθροισμα όλων των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων $= n$.

Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Βήμα I: Βρίσκω τις ιδιοτιμές λύνοντας την $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$.

Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Βήμα Ι: Βρίσκω τις ιδιοτιμές λύνοντας την $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$.
   Βρίσκουμε ότι $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Βήμα Ι: Βρίσκω τις ιδιοτιμές λύνοντας την $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Βρίσκουμε ότι $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.
2. Βήμα ΙΙ. Βρίσκω τους μηδενοχώρους $\mathrm{Null}(A - I), \mathrm{Null}(A - 2I)$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Βήμα Ι: Βρίσκω τις ιδιοτιμές λύνοντας την $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Βρίσκουμε ότι $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.
2. Βήμα ΙΙ. Βρίσκω τους μηδενοχώρους $\mathrm{Null}(A - I), \mathrm{Null}(A - 2I)$ και υπολογίζω τη διάστασή τους.

Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Βήμα Ι: Βρίσκω τις ιδιοτιμές λύνοντας την $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Βρίσκουμε ότι $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.
2. Βήμα ΙΙ. Βρίσκω τους μηδενοχώρους $\mathrm{Null}(A - I), \mathrm{Null}(A - 2I)$ και υπολογίζω τη διάστασή τους.
3. Έχουμε ότι η $\mathrm{dimNull}(A - I) = 1$ και $\mathrm{dimNull}(A - 2I) = 2$,

Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Βήμα I: Βρίσκω τις ιδιοτιμές λύνοντας την $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Βρίσκουμε ότι $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.
2. Βήμα II. Βρίσκω τους μηδενοχώρους $\mathrm{Null}(A - I), \mathrm{Null}(A - 2I)$ και υπολογίζω τη διάστασή τους.
3. Έχουμε ότι η $\mathrm{dimNull}(A - I) = 1$ και $\mathrm{dimNull}(A - 2I) = 2$, άρα οι γεωμετρικές πολλαπλότητες είναι ίσες με τις αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες.

Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο παρακάτω πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Βήμα I: Βρίσκω τις ιδιοτιμές λύνοντας την $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$. Βρίσκουμε ότι $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.
2. Βήμα II. Βρίσκω τους μηδενοχώρους $\mathrm{Null}(A - I), \mathrm{Null}(A - 2I)$ και υπολογίζω τη διάστασή τους.
3. Έχουμε ότι η $\mathrm{dimNull}(A - I) = 1$ και $\mathrm{dimNull}(A - 2I) = 2$, άρα οι γεωμετρικές πολλαπλότητες είναι ίσες με τις αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες. Άρα A διαγωνιοποιήσιμος!

Συνέχεια παραδείγματος.

Βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{Null}(A-I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},$$

Συνέχεια παραδείγματος.

Βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{Null}(A-I)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\-2\\-1\end{bmatrix}\right\},\mathrm{Null}(A-2I)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Συνέχεια παραδείγματος.

Βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{Null}(A - I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \mathrm{Null}(A - 2I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

και άρα μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα P ως

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

Συνέχεια παραδείγματος.

Βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{Null}(A-I)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\-2\\-1\end{bmatrix}\right\},\mathrm{Null}(A-2I)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

και άρα μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα P ως

$$P=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-2&0&1\\1&2&0\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Συνέχεια παραδείγματος.

Βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{Null}(A-I)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\-2\\-1\end{bmatrix}\right\}, \mathrm{Null}(A-2I)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

και άρα μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα P ως

$$P=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\-2 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

και άρα $A=P\Lambda P^{-1}$.

Άλλο Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο κατώθι πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Άλλο Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο κατώθι πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.

Άλλο Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο κατώθι πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.Για $\lambda = -2$ έχουμε

$$A + 2I \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Άλλο Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο κατώθι πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.Για $\lambda = -2$ έχουμε

$$A + 2I \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

άρα έχουμε μία ελεύθερη μεταβλητή και άρα γεωμετρική πολλαπλότητα $<$ αλγεβρική πολλαπλότητα.

Άλλο Παράδειγμα.

Να βρεθεί αν ο κατώθι πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι
$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$.Για $\lambda = -2$ έχουμε

$$A + 2I \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

άρα έχουμε μία ελεύθερη μεταβλητή και άρα γεωμετρική πολλαπλότητα $<$ αλγεβρική πολλαπλότητα.

Άρα ο A **δεν** είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Διαγώνιοι Πίνακες.

Λήμμα: Έστω ένας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^n$ με τη διαγώνιο να είναι $[d_1, d_2, \ldots, d_n]$.

Διαγώνιοι Πίνακες.

Λήμμα: Έστω ένας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^n$ με τη διαγώνιο να είναι $[d_1, d_2, \ldots, d_n]$. Τότε ο D^k είναι ένας διαγώνιος με τη διαγώνιο να είναι $[d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k]$.

Διαγώνιοι Πίνακες.

Λήμμα: Έστω ένας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^n$ με τη διαγώνιο να είναι $[d_1, d_2, \ldots, d_n]$. Τότε ο D^k είναι ένας διαγώνιος με τη διαγώνιο να είναι $[d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k]$.

Απόδειξη της για $k = 2$: Το i-οστό στοιχείο πάνω στη διαγώνιο είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμής με τον εαυτό της, άρα $d_i \cdot d_i = d_i^2$.

Διαγώνιοι Πίνακες.

Λήμμα: Έστω ένας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^n$ με τη διαγώνιο να είναι $[d_1, d_2, \ldots, d_n]$. Τότε ο D^k είναι ένας διαγώνιος με τη διαγώνιο να είναι $[d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k]$.

Απόδειξη της για $k = 2$: Το i-οστό στοιχείο πάνω στη διαγώνιο είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμής με τον εαυτό της, άρα $d_i \cdot d_i = d_i^2$.Το (i, j) στοιχείο με $i \neq j$ αντιστοιχεί στα στοιχεία εκτός διαγωνίου,

Διαγώνιοι Πίνακες.

Λήμμα: Έστω ένας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^n$ με τη διαγώνιο να είναι $[d_1, d_2, \ldots, d_n]$. Τότε ο D^k είναι ένας διαγώνιος με τη διαγώνιο να είναι $[d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k]$.

Απόδειξη της για $k = 2$: Το i-οστό στοιχείο πάνω στη διαγώνιο είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμής με τον εαυτό της, άρα $d_i \cdot d_i = d_i^2$.Το (i, j) στοιχείο με $i \neq j$ αντιστοιχεί στα στοιχεία εκτός διαγωνίου,και ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής με τη j-οστή στήλη,

Διαγώνιοι Πίνακες.

Λήμμα: Έστω ένας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^n$ με τη διαγώνιο να είναι $[d_1, d_2, \ldots, d_n]$. Τότε ο D^k είναι ένας διαγώνιος με τη διαγώνιο να είναι $[d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k]$.

Απόδειξη της για $k = 2$: Το i-οστό στοιχείο πάνω στη διαγώνιο είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμής με τον εαυτό της, άρα $d_i \cdot d_i = d_i^2$.Το (i, j) στοιχείο με $i \neq j$ αντιστοιχεί στα στοιχεία εκτός διαγωνίου,και ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής με τη j-οστή στήλη, το οποίο κάνει $d_i \cdot 0 + 0 \cdot d_j = 0$. ✓

Διαγώνιοι Πίνακες.

Λήμμα: Έστω ένας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^n$ με τη διαγώνιο να είναι $[d_1, d_2, \ldots, d_n]$. Τότε ο D^k είναι ένας διαγώνιος με τη διαγώνιο να είναι $[d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k]$.

Απόδειξη της για $k = 2$: Το i-οστό στοιχείο πάνω στη διαγώνιο είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμής με τον εαυτό της, άρα $d_i \cdot d_i = d_i^2$.Το (i, j) στοιχείο με $i \neq j$ αντιστοιχεί στα στοιχεία εκτός διαγωνίου,και ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής με τη j-οστή στήλη, το οποίο κάνει $d_i \cdot 0 + 0 \cdot d_j = 0$. ✓

Θεώρημα

Έστω πίνακας διαγωνιοποιήσιμος A με $A = P \Lambda P^{-1}$ όπου Λ ο διαγώνιος με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο. Τότε $A^k = P \Lambda^k P^{-1}$.

Διαγώνιοι Πίνακες.

Λήμμα: Έστω ένας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^n$ με τη διαγώνιο να είναι $[d_1, d_2, \ldots, d_n]$. Τότε ο D^k είναι ένας διαγώνιος με τη διαγώνιο να είναι $[d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k]$.

Απόδειξη της για $k = 2$: Το i-οστό στοιχείο πάνω στη διαγώνιο είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμής με τον εαυτό της, άρα $d_i \cdot d_i = d_i^2$.Το (i, j) στοιχείο με $i \neq j$ αντιστοιχεί στα στοιχεία εκτός διαγωνίου,και ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής με τη j-οστή στήλη, το οποίο κάνει $d_i \cdot 0 + 0 \cdot d_j = 0$. ✓

Θεώρημα

Έστω πίνακας διαγωνιοποιήσιμος A με $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου Λ ο διαγώνιος με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο. Τότε $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$.

Απόδειξη:

$A^k = (P\Lambda^k P^{-1})^k = (P\Lambda P^{-1}) \cdot (P\Lambda P^{-1}) \cdot \ldots (P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda^k P^{-1}$.

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$A^{1000} + A^2 + I =$

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$$A^{1000} + A^2 + I = P\Lambda^{1000}P^{-1} + PA^2P^{-1} + PP^{-1} =$$

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$$A^{1000} + A^2 + I = P\Lambda^{1000}P^{-1} + PA^2P^{-1} + PP^{-1} = P(\Lambda^{1000} + \Lambda^2 + I)P,$$

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$$A^{1000} + A^2 + I = P\Lambda^{1000}P^{-1} + PA^2P^{-1} + PP^{-1} = P(\Lambda^{1000} + \Lambda^2 + I)P,$$

άρα αρκεί να κάνω 2 πολλαπλασιασμούς πινάκων και δύο προσθέσεις πινάκων!

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$$A^{1000} + A^2 + I = P\Lambda^{1000}P^{-1} + PA^2P^{-1} + PP^{-1} = P(\Lambda^{1000} + \Lambda^2 + I)P,$$

άρα αρκεί να κάνω 2 πολλαπλασιασμούς πινάκων και δύο προσθέσεις πινάκων!

Επιπλέον, αν A αντιστρέψιμος τότε $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$$A^{1000} + A^2 + I = P\Lambda^{1000}P^{-1} + PA^2P^{-1} + PP^{-1} = P(\Lambda^{1000} + \Lambda^2 + I)P,$$

άρα αρκεί να κάνω 2 πολλαπλασιασμούς πινάκων και δύο προσθέσεις πινάκων!

Επιπλέον, αν A αντιστρέψιμος τότε $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$ καθώς

$$A \cdot (P\Lambda^{-1}P^{-1}) =$$

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$$A^{1000} + A^2 + I = P\Lambda^{1000}P^{-1} + PA^2P^{-1} + PP^{-1} = P(\Lambda^{1000} + \Lambda^2 + I)P,$$

άρα αρκεί να κάνω 2 πολλαπλασιασμούς πινάκων και δύο προσθέσεις πινάκων!

Επιπλέον, αν A αντιστρέψιμος τότε $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$ καθώς

$$A \cdot (P\Lambda^{-1}P^{-1}) = P\Lambda P^{-1}P\Lambda^{-1}P^{-1} =$$

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$$A^{1000} + A^2 + I = P\Lambda^{1000}P^{-1} + PA^2P^{-1} + PP^{-1} = P(\Lambda^{1000} + \Lambda^2 + I)P,$$

άρα αρκεί να κάνω 2 πολλαπλασιασμούς πινάκων και δύο προσθέσεις πινάκων!

Επιπλέον, αν A αντιστρέψιμος τότε $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$ καθώς

$$A \cdot (P\Lambda^{-1}P^{-1}) = P\Lambda P^{-1}P\Lambda^{-1}P^{-1} = P\Lambda\Lambda^{-1}P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = I.$$

Εφαρμογές.

Αν A διαγωνιοποιήσιμος να υπολογιστεί ο $A^{1000} + A^2 + I$.

$$A^{1000} + A^2 + I = P\Lambda^{1000}P^{-1} + PA^2P^{-1} + PP^{-1} = P(\Lambda^{1000} + \Lambda^2 + I)P,$$

άρα αρκεί να κάνω 2 πολλαπλασιασμούς πινάκων και δύο προσθέσεις πινάκων!

Επιπλέον, αν A αντιστρέψιμος τότε $A^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$ καθώς

$$A \cdot (P\Lambda^{-1}P^{-1}) = P\Lambda P^{-1}P\Lambda^{-1}P^{-1} = P\Lambda\Lambda^{-1}P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = I.$$

Γραμμική Άλγεβρα και αριθμοί Fibonnaci.

Η ακολουθία Fibonnaci είναι $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3.$

Γραμμική Άλγεβρα και αριθμοί Fibonnaci.

Η ακολουθία Fibonnaci είναι $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3.$

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

Γραμμική Άλγεβρα και αριθμοί Fibonnaci.

Η ακολουθία Fibonnaci είναι $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$.

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

Με άλλα λόγια

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A^2 \cdot \begin{bmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{bmatrix} = \ldots = A^{n-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γραμμική Άλγεβρα και αριθμοί Fibonnaci.

Η ακολουθία Fibonnaci είναι $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$.

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$$

Με άλλα λόγια

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = A^2 \cdot \begin{bmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{bmatrix} = \ldots = A^{n-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ιδέα: Αν διαγωνιοποιήσουμε τον A ως $A = P\Lambda P^{-1}$ τότε $A^{n-2} = P\Lambda^{n-2}P^{-1}$ και ίσως μπορούμε να βρούμε **κλειστό τύπο** για τους αριθμούς Fibonacci!

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

Γραμμική Άλγεβρα και αριθμοί Fibonnaci.

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Γραμμική Άλγεβρα και αριθμοί Fibonnaci.

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

και άρα οι δύο ρίζες είναι $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

και άρα οι δύο ρίζες είναι $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Υπολογίζουμε τους αντίστοιχους μηδενοχώρους και παίρνουμε ένα ιδιοδιάνυσμα από τον καθένα, πχ

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γραμμική Άλγεβρα και αριθμοί Fibonnaci.

Έχουμε

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

και άρα οι δύο ρίζες είναι $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Υπολογίζουμε τους αντίστοιχους μηδενοχώρους και παίρνουμε ένα ιδιοδιάνυσμα από τον καθένα, πχ

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $A = P\Lambda P^{-1}$ με

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Γραμμική Άλγεβρα και αριθμοί Fibonnaci.

Άρα $A = P\Lambda P^{-1}$ με

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}$$

Άρα $A = P\Lambda P^{-1}$ με

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}$$

άρα

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = P\Lambda^{n-2}P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $A = P\Lambda P^{-1}$ με

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix}$$

άρα

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = P\Lambda^{n-2}P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και άρα μετά από πράξεις έχουμε

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Κάποιες Εφαρμογές ιδιοτιμών.

Μπορούμε να βρούμε κλειστή μορφή του n-οστού όρου *γραμμικών* αναδρομικών εξισώσεων, πχ

$$a_n = 2 \cdot a_{n-2} - 66 \cdot a_{n-3} + a_{n-7}$$

Κάποιες Εφαρμογές ιδιοτιμών.

Μπορούμε να βρούμε κλειστή μορφή του n-οστού όρου *γραμμικών* αναδρομικών εξισώσεων, πχ

$$a_n = 2 \cdot a_{n-2} - 66 \cdot a_{n-3} + a_{n-7}$$

αλλά και *γραμμικών* διαφορικών συστημάτων

$$f'(x) = -f(x) + 2g(x), \quad g'(x) = 2f(x) + 5g(x), f, g \in \mathbb{R}$$

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Τι είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας.
- Κριτηρια διαγωνιοποιησιμότητας.
- Χρησιμότητα διαγωνιοποιησιμότητας.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!