Γραμμική Άλγεβρα
Δέκατη Έκτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ένα παράδειγμα.

Ας πούμε ότι έχουμε παρατηρήσει το εξής μοντέλο για τον πληθυσμό ενός είδους του ζωϊκού βασιλείου.

Κάθε μέλος του πληθυσμού μπορεί να ζήσει το πολύ 4 ημέρες και αναπαράγεται κάθε μέρα με τους εξής κανόνες.

Ένα παράδειγμα.

Ας πούμε ότι έχουμε παρατηρήσει το εξής μοντέλο για τον πληθυσμό ενός είδους του ζωϊκού βασιλείου.

Κάθε μέλος του πληθυσμού μπορεί να ζήσει το πολύ 4 ημέρες και αναπαράγεται κάθε μέρα με τους εξής κανόνες.

1. Η πιθανότητα να αναπαραχθεί ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με r_i.

Ένα παράδειγμα.

Ας πούμε ότι έχουμε παρατηρήσει το εξής μοντέλο για τον πληθυσμό ενός είδους του ζωϊκού βασιλείου.

Κάθε μέλος του πληθυσμού μπορεί να ζήσει το πολύ 4 ημέρες και αναπαράγεται κάθε μέρα με τους εξής κανόνες.

1. Η πιθανότητα να αναπαραχθεί ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με r_i.
2. Η πιθανότητα να επιβιώσει ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με f_i.

Ένα παράδειγμα.

Ας πούμε ότι έχουμε παρατηρήσει το εξής μοντέλο για τον πληθυσμό ενός είδους του ζωϊκού βασιλείου.

Κάθε μέλος του πληθυσμού μπορεί να ζήσει το πολύ 4 ημέρες και αναπαράγεται κάθε μέρα με τους εξής κανόνες.

1. Η πιθανότητα να αναπαραχθεί ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με r_i.
2. Η πιθανότητα να επιβιώσει ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με f_i.

Ξεκινώντας από μία αρχική κατάσταση του πληθυσμού τη μέρα 0,

Ένα παράδειγμα.

Ας πούμε ότι έχουμε παρατηρήσει το εξής μοντέλο για τον πληθυσμό ενός είδους του ζωϊκού βασιλείου.

Κάθε μέλος του πληθυσμού μπορεί να ζήσει το πολύ 4 ημέρες και αναπαράγεται κάθε μέρα με τους εξής κανόνες.

1. Η πιθανότητα να αναπαραχθεί ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με r_i.
2. Η πιθανότητα να επιβιώσει ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με f_i.

Ξεκινώντας από μία αρχική κατάσταση του πληθυσμού τη μέρα 0, η οποία μας λέει ότι υπάρχουν n_i μέλη από κάθε ηλικία να απαντηθεί η εξής ερώτηση:

Ένα παράδειγμα.

Ας πούμε ότι έχουμε παρατηρήσει το εξής μοντέλο για τον πληθυσμό ενός είδους του ζωϊκού βασιλείου.

Κάθε μέλος του πληθυσμού μπορεί να ζήσει το πολύ 4 ημέρες και αναπαράγεται κάθε μέρα με τους εξής κανόνες.

1. Η πιθανότητα να αναπαραχθεί ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με r_i.
2. Η πιθανότητα να επιβιώσει ένα μέλος του πληθυσμού το οποίο ηλικιακά είναι i ημερών ισούται με f_i.

Ξεκινώντας από μία αρχική κατάσταση του πληθυσμού τη μέρα 0, η οποία μας λέει ότι υπάρχουν n_i μέλη από κάθε ηλικία να απαντηθεί η εξής ερώτηση: Θα επιβιώσει ο πληθυσμός; Κι αν ναι, θα συνεχίσει να αυξάνεται, το μεγεθός του θα συγκλίνει κάπου ή όχι;

Εκφράζοντας το πρόβλημα σαν πίνακα.

Τι εκφράζει το εξής γίνομενο πίνακα επί διάνυσμα;

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

Εκφράζοντας το πρόβλημα σαν πίνακα.

Τι εκφράζει το εξής γίνομενο πίνακα επί διάνυσμα;

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

Εκφράζει το ποια είναι η ηλικιακή κατανομή του πληθυσμού την *πρώτη* ημέρα

Εκφράζοντας το πρόβλημα σαν πίνακα.

Τι εκφράζει το εξής γίνομενο πίνακα επί διάνυσμα;

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

Εκφράζει το ποια είναι η ηλικιακή κατανομή του πληθυσμού την *πρώτη* ημέρα Το διάνυσμα που εκφράζει την ηλικιακή κατανομή τη δεύτερη μέρα είναι $A \cdot (Ax) = A^2x$,

Εκφράζοντας το πρόβλημα σαν πίνακα.

Τι εκφράζει το εξής γίνομενο πίνακα επί διάνυσμα;

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

Εκφράζει το ποια είναι η ηλικιακή κατανομή του πληθυσμού την *πρώτη* ημέρα Το διάνυσμα που εκφράζει την ηλικιακή κατανομή τη δεύτερη μέρα είναι $A \cdot (Ax) = A^2x$, την τρίτη μέρα θα είναι $A \cdot (A^2x) = A^3x$

Εκφράζοντας το πρόβλημα σαν πίνακα.

Τι εκφράζει το εξής γίνομενο πίνακα επί διάνυσμα;

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

Εκφράζει το ποια είναι η ηλικιακή κατανομή του πληθυσμού την *πρώτη* ημέρα Το διάνυσμα που εκφράζει την ηλικιακή κατανομή τη δεύτερη μέρα είναι $A \cdot (Ax) = A^2 x$, την τρίτη μέρα θα είναι $A \cdot (A^2 x) = A^3 x$ και την k-οστή μέρα θα είναι

$$A^k x = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}$$

Εκφράζοντας το πρόβλημα σαν πίνακα.

Τι εκφράζει το εξής γίνομενο πίνακα επί διάνυσμα;

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

Εκφράζει το ποια είναι η ηλικιακή κατανομή του πληθυσμού την *πρώτη* ημέρα Το διάνυσμα που εκφράζει την ηλικιακή κατανομή τη δεύτερη μέρα είναι $A \cdot (Ax) = A^2 x$, την τρίτη μέρα θα είναι $A \cdot (A^2 x) = A^3 x$ και την k-οστή μέρα θα είναι

$$A^k x = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιάνυσματα.

Για να απαντήσουμε ερωτήματα σαν το παραπάνω (αλλά και πολλά άλλα) χρειαζόμαστε τις έννοιες της ιδιοτιμής και του ιδιοδιανύσματος.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιάνυσματα.

Για να απαντήσουμε ερωτήματα σαν το παραπάνω (αλλά και πολλά άλλα) χρειαζόμαστε τις έννοιες της ιδιοτιμής και του ιδιοδιανύσματος.

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $v \in \mathbb{R}^n$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Αν $Av = \lambda v$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε το λ λέγεται ιδιοτιμή του A και το v ιδιοδιάνυσμα του A.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιάνυσματα.

Για να απαντήσουμε ερωτήματα σαν το παραπάνω (αλλά και πολλά άλλα) χρειαζόμαστε τις έννοιες της ιδιοτιμής και του ιδιοδιανύσματος.

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $v \in \mathbb{R}^n$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Αν $Av = \lambda v$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε το λ λέγεται ιδιοτιμή του A και το v ιδιοδιάνυσμα του A.

$\star$ Η εξίσωση $Av = \lambda v$ εκφράζει ότι το διάνυσμα v υπό την γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ *δεν* αλλάζει κατεύθυνση, παρά μόνο διαστέλλεται σε μήκος.

Παράδειγμα I.

Να βρεθεί αν τα διανύσματα v, u είναι ιδιοδιανύσματα του A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα I.

Να βρεθεί αν τα διανύσματα v, u είναι ιδιοδιανύσματα του A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε

$$Av = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα Ι.

Να βρεθεί αν τα διανύσματα v, u είναι ιδιοδιανύσματα του A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε

$$Av = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2v \quad \checkmark,$$

Παράδειγμα Ι.

Να βρεθεί αν τα διανύσματα v, u είναι ιδιοδιανύσματα του A, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε

$$Av = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2v \quad \checkmark, Au = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Όμως δεν υπάρχει λ ώστε $Au = \lambda u$ άρα u δεν είναι ιδιοδιάνυσμα.

Παράδειγμα II.

Είναι το v ιδιοδιάνυσμα του A;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα ΙΙ.

Είναι το v ιδιοδιάνυσμα του A;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$Av = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα II.

Είναι το v ιδιοδιάνυσμα του A;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$Av = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{0}_{\lambda} \cdot v,$$

άρα το v είναι ιδιοδιάνυσμα στο οποίο αντιστοιχεί η ιδιοτιμή 0.

Πως βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A;

Μπορούμε να γράψουμε

$$Av = \lambda v \Rightarrow$$

Πως βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A;

Μπορούμε να γράψουμε

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow$$

Πως βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A;

Μπορούμε να γράψουμε

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Πότε παίρνουμε $v \neq 0$;

Πως βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A;

Μπορούμε να γράψουμε

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Πότε παίρνουμε $v \neq 0$;

Αν $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε η $(A - \lambda I)v = 0$ έχει μοναδική λύση την $v = 0$,

Πως βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A;

Μπορούμε να γράψουμε

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Πότε παίρνουμε $v \neq 0$;

Αν $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε η $(A - \lambda I)v = 0$ έχει μοναδική λύση την $v = 0$, άρα πρέπει $A - \lambda I$ να **μην** είναι αντιστρέψιμος, το οποίο μεταφράζεται σε

Πως βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A;

Μπορούμε να γράψουμε

$$Av = \lambda v \Rightarrow Av - \lambda v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Πότε παίρνουμε $v \neq 0$;

Αν $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε η $(A - \lambda I)v = 0$ έχει μοναδική λύση την $v = 0$, άρα πρέπει $A - \lambda I$ να **μην** είναι αντιστρέψιμος, το οποίο μεταφράζεται σε

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda),$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda),$$

άρα $det(A - \lambda I) = 0$ δίνει ιδιοτιμές $1, 2, -2$.

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^{3+3}(-2-\lambda) \cdot det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^{3+3}(-2-\lambda) \cdot det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-2-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-4) =$$

Παράδειγμα.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^{3+3}(-2-\lambda) \cdot det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-2-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-4) = (-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2),$$

άρα οι πιθανές ιδιοτιμες είναι -2(δύο φορές) και 1.

Πως βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα;

Δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι λύσεις της εξίσωσης
$det(A - \lambda I) = 0$,

Πως βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα;

Δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι λύσεις της εξίσωσης $det(A - \lambda I) = 0$, το οποίο είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n.

Πως βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα;

Δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι λύσεις της εξίσωσης $det(A - \lambda I) = 0$, το οποίο είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Για κάθε ιδιοτιμή λ έχουμε

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Null}(A - \lambda I),$$

Πως βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα;

Δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι λύσεις της εξίσωσης $det(A - \lambda I) = 0$, το οποίο είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Για κάθε ιδιοτιμή λ έχουμε

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Null}(A - \lambda I),$$

άρα τα διανύσματα τα οποία αντιστοιχούν σε εκείνη την ιδιοτιμή λ είναι ο μηδενοχώρος του $A - \lambda I$.

Πως βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα;

Δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι λύσεις της εξίσωσης $det(A - \lambda I) = 0$, το οποίο είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Για κάθε ιδιοτιμή λ έχουμε

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Null}(A - \lambda I),$$

άρα τα διανύσματα τα οποία αντιστοιχούν σε εκείνη την ιδιοτιμή λ είναι ο μηδενοχώρος του $A - \lambda I$.

Ο υποχώρος $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$ λέγεται και *ιδιοχώρος* του A σε σχέση με την ιδιοτιμή λ.

Παράδειγμα.

Με δεδομένενο ότι $\lambda = 3$ είναι μια ιδιοτιμή του

$$\begin{bmatrix} 11 & -4 & -8 \\ 4 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

να βρεθεί ο ιδιοχώρος του A σε σχέση με την ιδιοτιμή 3.

Παράδειγμα.

Με δεδομένενο ότι $\lambda = 3$ είναι μια ιδιοτιμή του

$$\begin{bmatrix} 11 & -4 & -8 \\ 4 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

να βρεθεί ο ιδιοχώρος του A σε σχέση με την ιδιοτιμή 3.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -8 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Με δεδομένενο ότι $\lambda = 3$ είναι μια ιδιοτιμή του

$$\begin{bmatrix} 11 & -4 & -8 \\ 4 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

να βρεθεί ο ιδιοχώρος του A σε σχέση με την ιδιοτιμή 3.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -8 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα $4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$ και άρα κάθε $x \in \mathrm{Null}(A - 3I)$ ικανοποιεί

$$x = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Με δεδομένενο ότι $\lambda = 3$ είναι μια ιδιοτιμή του

$$\begin{bmatrix} 11 & -4 & -8 \\ 4 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & -5 \end{bmatrix},$$

να βρεθεί ο ιδιοχώρος του A σε σχέση με την ιδιοτιμή 3.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -8 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα $4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$ και άρα κάθε $x \in \mathrm{Null}(A - 3I)$ ικανοποιεί

$$x = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Null}(A - 3I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ανακεφαλαιώνοντας.

Κάθε ζεύγος $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί $Av = \lambda v$ λέγεται ιδιοτιμή και ιδιόδιανυσμα του A.

Ανακεφαλαιώνοντας.

Κάθε ζεύγος $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί $Av = \lambda v$ λέγεται ιδιοτιμή και ιδιόδιανυσμα του A.

1. Για να βρω τις ιδιοτιμές του A λύνω την εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$ όπου ο λ είναι ο άγνωστος.

Κάθε ζεύγος $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί $Av = \lambda v$ λέγεται ιδιοτιμή και ιδιόδιανυσμα του A.

1. Για να βρω τις ιδιοτιμές του A λύνω την εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$ όπου ο λ είναι ο άγνωστος. Αυτή είναι μια εξίσωση n-οστού βαθμού, αν αναπτύξουμε την ορίζουσα, αλλά είναι προτιμότερο να τη φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για να λύσουμε την εξίσωση.

Ανακεφαλαιώνοντας.

Κάθε ζεύγος $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί $Av = \lambda v$ λέγεται ιδιοτιμή και ιδιόδιανυσμα του A.

1. Για να βρω τις ιδιοτιμές του A λύνω την εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$ όπου ο λ είναι ο άγνωστος. Αυτή είναι μια εξίσωση n-οστού βαθμού, αν αναπτύξουμε την ορίζουσα, αλλά είναι προτιμότερο να τη φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για να λύσουμε την εξίσωση.
2. Για κάθε ιδιοτιμή λ περιγράφουμε τον χώρο $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$ λύνοντας την εξίσωση $(A - \lambda I)x = 0$,

Ανακεφαλαιώνοντας.

Κάθε ζεύγος $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί $Av = \lambda v$ λέγεται ιδιοτιμή και ιδιόδιανυσμα του A.

1. Για να βρω τις ιδιοτιμές του A λύνω την εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$ όπου ο λ είναι ο άγνωστος. Αυτή είναι μια εξίσωση n-οστού βαθμού, αν αναπτύξουμε την ορίζουσα, αλλά είναι προτιμότερο να τη φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για να λύσουμε την εξίσωση.
2. Για κάθε ιδιοτιμή λ περιγράφουμε τον χώρο $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$ λύνοντας την εξίσωση $(A - \lambda I)x = 0$, γράφοντας παραμετρικές εξισώσεις και εκφράζοντάς τον ως τη γραμμική θήκη r διανυσμάτων, όπου r το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών του $A - \lambda I$.

Διακριτές ιδιοτιμές.

Θεώρημα

Έστω $v_1, \ldots, v_k$ *ιδιοδιανύσματα του* A *τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *οι οποίες είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε τα* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

⋆ Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω p ο πρώτος δείκτης ώστε $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ γραμμικώς εξαρτημένα.

Θεώρημα

Έστω $v_1, \ldots, v_k$ ιδιοδιανύσματα του A τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι οποίες είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

⋆ Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω p ο πρώτος δείκτης ώστε $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$:

$$v_p = c_1 v_1 + \ldots + c_{p-1} v_{p-1}$$

Διακριτές ιδιοτιμές.

Θεώρημα

Έστω $v_1, \dots, v_k$ ιδιοδιανύσματα του A τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ οι οποίες είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε τα $v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

⋆ Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω p ο πρώτος δείκτης ώστε $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $c_1, c_2, \dots, c_{p-1}$:

$$v_p = c_1 v_1 + \ldots + c_{p-1} v_{p-1} \Rightarrow A v_p = A(c_1 v_1) + \ldots + A(c_{p-1} v_{p-1})$$

Διακριτές ιδιοτιμές.

Θεώρημα

Έστω $v_1, \ldots, v_k$ ιδιοδιανύσματα του A τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι οποίες είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

⋆ Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω p ο πρώτος δείκτης ώστε $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$:

$$v_p = c_1 v_1 + \ldots + c_{p-1} v_{p-1} \Rightarrow A v_p = A(c_1 v_1) + \ldots + A(c_{p-1} v_{p-1})$$

άρα

$A v_p = c_1(A v_1) + \ldots + c_{p-1}(A v_{p-1}) =$

Διακριτές ιδιοτιμές.

Θεώρημα

Έστω $v_1, \ldots, v_k$ *ιδιοδιανύσματα του* A *τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *οι οποίες είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε τα* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

$\star$ Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω p ο πρώτος δείκτης ώστε $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$:

$$v_p = c_1 v_1 + \ldots + c_{p-1} v_{p-1} \Rightarrow A v_p = A(c_1 v_1) + \ldots + A(c_{p-1} v_{p-1})$$

άρα

$$A v_p = c_1(A v_1) + \ldots + c_{p-1}(A v_{p-1}) = \Rightarrow \lambda_p v_p = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_{p-1} c_{p-1} v_{p-1}$$

Διακριτές ιδιοτιμές.

Θεώρημα

Έστω $v_1, \ldots, v_k$ ιδιοδιανύσματα του A τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι οποίες είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$\star$ Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω p ο πρώτος δείκτης ώστε $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$:

$$v_p = c_1 v_1 + \ldots + c_{p-1} v_{p-1} \Rightarrow A v_p = A(c_1 v_1) + \ldots + A(c_{p-1} v_{p-1})$$

άρα

$A v_p = c_1 (A v_1) + \ldots + c_{p-1} (A v_{p-1}) = \Rightarrow \lambda_p v_p = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_{p-1} c_{p-1} v_{p-1}$

άρα $c_1 (\lambda_1 - \lambda_p) v_1 + \ldots + c_{p-1} (\lambda_{p-1} - \lambda_p) = 0$

Διακριτές ιδιοτιμές.

Θεώρημα

Έστω $v_1, \ldots, v_k$ *ιδιοδιανύσματα του* A *τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *οι οποίες είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε τα* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

$\star$ Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω p ο πρώτος δείκτης ώστε $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$:

$$v_p = c_1 v_1 + \ldots + c_{p-1} v_{p-1} \Rightarrow A v_p = A(c_1 v_1) + \ldots + A(c_{p-1} v_{p-1})$$

άρα

$A v_p = c_1 (A v_1) + \ldots + c_{p-1} (A v_{p-1}) = \;\Rightarrow \lambda_p v_p = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_{p-1} c_{p-1} v_{p-1}$

άρα $c_1(\lambda_1 - \lambda_p) v_1 + \ldots + c_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) = 0 \Rightarrow$ λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των $v_1, \ldots, v_p$ έχουμε $c_j(\lambda_j - \lambda_p) = 0$

Θεώρημα

Έστω $v_1, \ldots, v_k$ ιδιοδιανύσματα του A τα οποία αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι οποίες είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$\star$ Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω p ο πρώτος δείκτης ώστε $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$:

$$v_p = c_1 v_1 + \ldots + c_{p-1} v_{p-1} \Rightarrow A v_p = A(c_1 v_1) + \ldots + A(c_{p-1} v_{p-1})$$

άρα

$A v_p = c_1(A v_1) + \ldots + c_{p-1}(A v_{p-1}) = \Rightarrow \lambda_p v_p = c_1 \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_{p-1} c_{p-1} v_{p-1}$ άρα $c_1(\lambda_1 - \lambda_p) v_1 + \ldots + c_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) = 0 \Rightarrow$ λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των $v_1, \ldots, v_p$ έχουμε $c_j(\lambda_j - \lambda_p) = 0$ και άρα για **τουλάχιστον** για ένα j έχουμε $\lambda_j = \lambda_p$, άτοπο.

Παράδειγμα.

Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί 1 και -1 είναι ιδιοτιμές του πίνακα

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 9 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί 1 και -1 είναι ιδιοτιμές του πίνακα

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 9 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Να επα-
ληθευτεί ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα.

Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί 1 και -1 είναι ιδιοτιμές του πίνακα

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 9 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Να επα-
ληθευτεί ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Τεχνική απόδειξης: Θα λύσουμε τα συστήματα
$(A-I)x=0, (A+I)x=0$ για να περιγράψουμε τους μηδενοχώρους
$\mathrm{Null}(A-I), \mathrm{Null}(A+I)$.

Παράδειγμα.

Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί 1 και -1 είναι ιδιοτιμές του πίνακα

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 9 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Να επα-
ληθευτεί ότι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Τεχνική απόδειξης: Θα λύσουμε τα συστήματα $(A-I)x=0, (A+I)x=0$ για να περιγράψουμε τους μηδενοχώρους $\mathrm{Null}(A-I), \mathrm{Null}(A+I)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε $u \in \mathrm{Null}(A-I), v \in \mathrm{Null}(A+I)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Συνέχεια.

Κοιτάμε τους

$$A - I = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}, A + I = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Συνέχεια.

Κοιτάμε τους

$$A - I = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}, A + I = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

και βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{Null}(A - I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}, \mathrm{Null}(A + I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Συνέχεια.

Κοιτάμε τους

$$A - I = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}, A + I = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

και βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{Null}(A - I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}, \mathrm{Null}(A + I) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Κάθε διάνυσμα στο $\mathrm{Null}(A - I)$ είναι όντως γραμμικώς ανεξάρτητο από κάθε διάυσμα στο $\mathrm{Null}(A + I)$ (γιατί;).

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό ;

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό ;

Σημαίνει ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος!

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό ;

Σημαίνει ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος!

Ισοδύναμα, υπάρχει μια τουλάχιστον ελεύθερη μεταβλητή,

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό ;

Σημαίνει ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος!

Ισοδύναμα, υπάρχει μια τουλάχιστον ελεύθερη μεταβλητή, οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες,

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό ;

Σημαίνει ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος!

Ισοδύναμα, υπάρχει μια τουλάχιστον ελεύθερη μεταβλητή, οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες, οι γραμμές του είναι γραμμικώς εξαρτημένες,

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό ;

Σημαίνει ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος!

Ισοδύναμα, υπάρχει μια τουλάχιστον ελεύθερη μεταβλητή, οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες, οι γραμμές του είναι γραμμικώς εξαρτημένες, $rank(A) < n$,

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό ;

Σημαίνει ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος!

Ισοδύναμα, υπάρχει μια τουλάχιστον ελεύθερη μεταβλητή, οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες, οι γραμμές του είναι γραμμικώς εξαρτημένες, $rank(A) < n$, $dim\ker(A) \geq 1$ και ούτω καθεξής.

Το 0 σαν ιδιοτιμή του A.

Όταν έχουμε $\lambda = 0$ σαν ιδιοτιμή του A η σχέση $Av = \lambda v$ μας δίνει ότι $Av = 0$ για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό ;

Σημαίνει ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος!

Ισοδύναμα, υπάρχει μια τουλάχιστον ελεύθερη μεταβλητή, οι στήλες του A είναι γραμμικώς εξαρτημένες, οι γραμμές του είναι γραμμικώς εξαρτημένες, $rank(A) < n$, $dim\ker(A) \geq 1$ και ούτω καθεξής.

Επίσης, A αντιστρέψιμος **ισοδυναμεί** με το να μην έχει 0 σαν ιδιοτιμή.

Γενικότερα.

Όπως θα δούμε, αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές (με πολλαπλότητα) του A ισχύει ότι

$$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

Γενικότερα.

Όπως θα δούμε, αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές (με πολλαπλότητα) του A ισχύει ότι

$$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

$\star$ Ενδεχομένως η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$ να έχει έναν αριθμό ως πολλαπλή ρίζα, για παράδειγμα η $(\lambda + 1)^3(\lambda - 2) = 0$ έχει το -1 σαν τριπλή ρίζα.

Γενικότερα.

Όπως θα δούμε, αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές (με πολλαπλότητα) του A ισχύει ότι

$$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

⋆ Ενδεχομένως η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$ να έχει έναν αριθμό ως πολλαπλή ρίζα, για παράδειγμα η $(\lambda + 1)^3(\lambda - 2) = 0$ έχει το -1 σαν τριπλή ρίζα.Μετράμε την ιδιοτιμή τόσες φορές όσο και η πολλαπλότητά της,

Γενικότερα.

Όπως θα δούμε, αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές (με πολλαπλότητα) του A ισχύει ότι

$$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

$\star$ Ενδεχομένως η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$ να έχει έναν αριθμό ως πολλαπλή ρίζα, για παράδειγμα η $(\lambda + 1)^3(\lambda - 2) = 0$ έχει το -1 σαν τριπλή ρίζα.Μετράμε την ιδιοτιμή τόσες φορές όσο και η πολλαπλότητά της, δηλαδή στην προηγούμενη περίπτωση έχουμε
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 2.$

Γενικότερα.

Όπως θα δούμε, αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές (με πολλαπλότητα) του A ισχύει ότι

$$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

$\star$ Ενδεχομένως η εξίσωση $det(A - \lambda I) = 0$ να έχει έναν αριθμό ως πολλαπλή ρίζα, για παράδειγμα η $(\lambda + 1)^3(\lambda - 2) = 0$ έχει το -1 σαν τριπλή ρίζα.Μετράμε την ιδιοτιμή τόσες φορές όσο και η πολλαπλότητά της, δηλαδή στην προηγούμενη περίπτωση έχουμε
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 2.$

Επίσης, κάποιες ίσως να *μην* είναι πραγματικοί αριθμοί, αλλά δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την περίπτωση σε αυτό το μάθημα.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Ορισμό ιδιοτιμών και ιδοδιανυσμάτων.
- Πως βρίσκουμε ιδιοτιμές και πως βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.
- Ότι αντιστρεψιμότητα ισοδυναμεί με το 0 να μην είναι ιδιοτιμή.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!