Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Πέμπτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπενθύμιση της έννοιας της βάσης.

Στην προηγούμενη διάλεξη είδαμε την έννοια της *βάσης* και της *διάστασης*.

Υπενθύμιση της έννοιας της βάσης.

Στην προηγούμενη διάλεξη είδαμε την έννοια της *βάσης* και της *διάστασης*.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$

Υπενθύμιση της έννοιας της βάσης.

Στην προηγούμενη διάλεξη είδαμε την έννοια της *βάσης* και της *διάστασης*.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Υπενθύμιση της έννοιας της βάσης.

Στην προηγούμενη διάλεξη είδαμε την έννοια της *βάσης* και της *διάστασης*.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θεώρημα

*Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το **ίδιο** πλήθος στοιχείων.*

Υπενθύμιση της έννοιας της βάσης.

Στην προηγούμενη διάλεξη είδαμε την έννοια της *βάσης* και της *διάστασης*.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\text{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Συμβολίζουμε με $dim(V)$ και αποκαλούμε διάσταση το πλήθος των στοιχείων σε οποιαδήποτε βάση του V.

Φτιάχνοντας μια βάση του V.

Σε ένα διανυσματικό χώρο ο εξής αλγόριθμος φτιάχνει μια βάση του V.

Φτιάχνοντας μια βάση του V.

Σε ένα διανυσματικό χώρο ο εξής αλγόριθμος φτιάχνει μια βάση του V.

$\mathcal{B} = \emptyset$.

Φτιάχνοντας μια βάση του V.

Σε ένα διανυσματικό χώρο ο εξής αλγόριθμος φτιάχνει μια βάση του V.

$\mathcal{B} = \emptyset$.
Όσο υπάρχει $u \in V \setminus \mathrm{span}\{\mathcal{B}\}$ θέσε $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{u\}$.

Φτιάχνοντας μια βάση του V.

Σε ένα διανυσματικό χώρο ο εξής αλγόριθμος φτιάχνει μια βάση του V.

$\mathcal{B} = \emptyset$.
Όσο υπάρχει $u \in V \setminus \mathrm{span}\{\mathcal{B}\}$ θέσε $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{u\}$.

$\star$ Ο αλγόριθμος φτιάχνει την ακολουθία συνόλων

$$\emptyset, \{u_1\}, \{u_1, u_2\}, \ldots, \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

όπου η γραμμική θήκη του i-οστού συνόλου είναι ένας υποχώρος διάστασης i.

Φτιάχνοντας μια βάση του V.

Σε ένα διανυσματικό χώρο ο εξής αλγόριθμος φτιάχνει μια βάση του V.

$\mathcal{B} = \emptyset$.
Όσο υπάρχει $u \in V \setminus \mathrm{span}\{\mathcal{B}\}$ θέσε $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{u\}$.

$\star$ Ο αλγόριθμος φτιάχνει την ακολουθία συνόλων

$$\emptyset, \{u_1\}, \{u_1, u_2\}, \ldots, \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

όπου η γραμμική θήκη του i-οστού συνόλου είναι ένας υποχώρος διάστασης i.

Με άλλα λόγια, κάθε φορά που ο αλγόριθμος προσθέτει ένα διάνυσμα στο $\mathcal{B}$ αυξάνει την διάσταση του χώρου τον οποίο παράγει κατά 1.

Ερμηνεία των ελεύθερων μεταβλητών ως βαθμών ελευθερίας.

Έστω $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ και ας σκεφτούμε την εξίσωση $Ax = 0$ εισάγοντας μία μία της εξισώσεις:

Ερμηνεία των ελεύθερων μεταβλητών ως βαθμών ελευθερίας.

Έστω $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ και ας σκεφτούμε την εξίσωση $Ax = 0$ εισάγοντας μία μία της εξισώσεις:

- Στην αρχή, δεν έχω καμία εξίσωση άρα υπάρχουν n βαθμοί ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.

Ερμηνεία των ελεύθερων μεταβλητών ως βαθμών ελευθερίας.

Έστω $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ και ας σκεφτούμε την εξίσωση $Ax = 0$ εισάγοντας μία μία της εξισώσεις:

- Στην αρχή, δεν έχω καμία εξίσωση άρα υπάρχουν n βαθμοί ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας μια εξίσωση, πχ την $x_1 + 2x_2 + \ldots - 3x_n = 0$

Ερμηνεία των ελεύθερων μεταβλητών ως βαθμών ελευθερίας.

Έστω $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ και ας σκεφτούμε την εξίσωση $Ax = 0$ εισάγοντας μία μία της εξισώσεις:

- Στην αρχή, δεν έχω καμία εξίσωση άρα υπάρχουν n βαθμοί ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας μια εξίσωση, πχ την $x_1 + 2x_2 + \ldots - 3x_n = 0$ το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών μειώνεται κατά ένα,

Ερμηνεία των ελεύθερων μεταβλητών ως βαθμών ελευθερίας.

Έστω $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ και ας σκεφτούμε την εξίσωση $Ax = 0$ εισάγοντας μία μία της εξισώσεις:

- Στην αρχή, δεν έχω καμία εξίσωση άρα υπάρχουν n βαθμοί ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας μια εξίσωση, πχ την $x_1 + 2x_2 + \ldots - 3x_n = 0$ το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών μειώνεται κατά ένα, άρα έχω έναν λιγότερο βαθμό ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.

Ερμηνεία των ελεύθερων μεταβλητών ως βαθμών ελευθερίας.

Έστω $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ και ας σκεφτούμε την εξίσωση $Ax = 0$ εισάγοντας μία μία της εξισώσεις:

- Στην αρχή, δεν έχω καμία εξίσωση άρα υπάρχουν n βαθμοί ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας μια εξίσωση, πχ την $x_1 + 2x_2 + \ldots - 3x_n = 0$ το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών μειώνεται κατά ένα, άρα έχω έναν λιγότερο βαθμό ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας άλλη μία εξίσωση, πχ την $0 \cdot x_1 - 2x_2 + \ldots + 5x_n = 0$ αφαιρώ άλλον έναν βαθμό ελευθερίας.

Ερμηνεία των ελεύθερων μεταβλητών ως βαθμών ελευθερίας.

Έστω $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ και ας σκεφτούμε την εξίσωση $Ax = 0$ εισάγοντας μία μία της εξισώσεις:

- Στην αρχή, δεν έχω καμία εξίσωση άρα υπάρχουν n βαθμοί ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας μια εξίσωση, πχ την $x_1 + 2x_2 + \ldots - 3x_n = 0$ το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών μειώνεται κατά ένα, άρα έχω έναν λιγότερο βαθμό ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας άλλη μία εξίσωση, πχ την $0 \cdot x_1 - 2x_2 + \ldots + 5x_n = 0$ αφαιρώ άλλον έναν βαθμό ελευθερίας.
- Κάθε φορά που βάζω μία εξίσωση (γραμμή του A) γραμμικώς ανεξάρτητη από τις προηγούμενες αφαιρώ έναν βαθμό ελευθερίας ως προς τι μπορεί να είναι το x.

Ερμηνεία των ελεύθερων μεταβλητών ως βαθμών ελευθερίας.

Έστω $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ και ας σκεφτούμε την εξίσωση $Ax = 0$ εισάγοντας μία μία της εξισώσεις:

- Στην αρχή, δεν έχω καμία εξίσωση άρα υπάρχουν n βαθμοί ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας μια εξίσωση, πχ την $x_1 + 2x_2 + \ldots - 3x_n = 0$ το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών μειώνεται κατά ένα, άρα έχω έναν λιγότερο βαθμό ελευθερίας για το τι μπορεί να είναι το x.
- Βάζοντας άλλη μία εξίσωση, πχ την $0 \cdot x_1 - 2x_2 + \ldots + 5x_n = 0$ αφαιρώ άλλον έναν βαθμό ελευθερίας.
- Κάθε φορά που βάζω μία εξίσωση (γραμμή του A) γραμμικώς ανεξάρτητη από τις προηγούμενες αφαιρώ έναν βαθμό ελευθερίας ως προς τι μπορεί να είναι το x.

⋆ Άρα ο βαθμός (πλήθος βασικών μεταβλητών) του A μπορεί να ερμηνευτεί και ως $n-$ (πλήθος των βαθμών ελευθερίας) που έχω για να ορίσω το x με βάση τους περιορισμούς $Ax = 0$.

Πίσω στην έννοια του βαθμού.

Είχαμε ορίσει τον βαθμό ενός πίνακα $A \in K^n$ ως το *πλήθος* των βασικών μεταβλητών του (όταν φέρουμε τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή).

Πίσω στην έννοια του βαθμού.

Είχαμε ορίσει τον βαθμό ενός πίνακα $A \in K^n$ ως το *πλήθος* των βασικών μεταβλητών του (όταν φέρουμε τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή).

Θεώρημα

*Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Πίσω στην έννοια του βαθμού.

Είχαμε ορίσει τον βαθμό ενός πίνακα $A \in K^n$ ως το *πλήθος* των βασικών μεταβλητών του (όταν φέρουμε τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή).

Θεώρημα

*Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Θεώρημα

*Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Πίσω στην έννοια του βαθμού.

Είχαμε ορίσει τον βαθμό ενός πίνακα $A \in K^n$ ως το *πλήθος* των βασικών μεταβλητών του (όταν φέρουμε τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή).

Θεώρημα

*Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Θεώρημα

*Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Θεώρημα

Ο βαθμός του πίνακα ισούται με τη διάσταση του μέγιστου υποπίνακα του A με μη μηδενική ορίζουσα.

Πίσω στην έννοια του βαθμού.

Είχαμε ορίσει τον βαθμό ενός πίνακα $A \in K^n$ ως το *πλήθος* των βασικών μεταβλητών του (όταν φέρουμε τον πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή).

Θεώρημα

Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το ***μέγιστο*** *πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Θεώρημα

Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το ***μέγιστο*** *πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Θεώρημα

Ο βαθμός του πίνακα ισούται με τη διάσταση του μέγιστου υποπίνακα του A με μη μηδενική ορίζουσα.

Θεώρημα

*Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Θεώρημα

*Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Απόδειξη: Καθώς φέρνουμε τον A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, οι γραμμοπράξεις **δεν** αλλάζουν τη διάσταση του χώρου των οποίων παράγουν οι γραμμές.

Θεώρημα

Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το ***μέγιστο*** *πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Απόδειξη: Καθώς φέρνουμε τον A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, οι γραμμοπράξεις **δεν** αλλάζουν τη διάσταση του χώρου των οποίων παράγουν οι γραμμές.Οι εναπομείνουσες (μη μηδενικές) γραμμές είναι όλες γραμμικώς ανεξάρτητες (γιατί;)!

Θεώρημα

*Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Απόδειξη: Καθώς φέρνουμε τον A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, οι γραμμοπράξεις **δεν** αλλάζουν τη διάσταση του χώρου των οποίων παράγουν οι γραμμές.Οι εναπομείνουσες (μη μηδενικές) γραμμές είναι όλες γραμμικώς ανεξάρτητες (γιατί;)!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα η διάσταση του χώρου των γραμμών ισούται με το πλήθος των εναπομείνοντων γραμμών,

Θεώρημα

Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το ***μέγιστο*** *πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Απόδειξη: Καθώς φέρνουμε τον A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, οι γραμμοπράξεις **δεν** αλλάζουν τη διάσταση του χώρου των οποίων παράγουν οι γραμμές.Οι εναπομείνουσες (μη μηδενικές) γραμμές είναι όλες γραμμικώς ανεξάρτητες (γιατί;)!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα η διάσταση του χώρου των γραμμών ισούται με το πλήθος των εναπομείνοντων γραμμών,το οποίο είναι ίσο με το πλήθος των βασικών μεταβλητών.

Θεώρημα

Ο βαθμός του πίνακα ισούται με το ***μέγιστο*** *πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.*

Απόδειξη: Καθώς φέρνουμε τον A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, οι γραμμοπράξεις **δεν** αλλάζουν τη διάσταση του χώρου των οποίων παράγουν οι γραμμές.Οι εναπομείνουσες (μη μηδενικές) γραμμές είναι όλες γραμμικώς ανεξάρτητες (γιατί;)!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα η διάσταση του χώρου των γραμμών ισούται με το πλήθος των εναπομείνοντων γραμμών,το οποίο είναι ίσο με το πλήθος των βασικών μεταβλητών. Αλλά η διάσταση του χώρου γραμμών ισούται με το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων αρχικών γραμμών!

Θεώρημα

Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m\times n}$ ισούται με το ***μέγιστο*** *πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Θεώρημα

Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m \times n}$ ισούται με το ***μέγιστο*** *πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Παρατήρηση: Στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, όχι μόνο οι μη μηδενικές γραμμές

Θεώρημα

*Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m\times n}$ ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Παρατήρηση: Στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, όχι μόνο οι μη μηδενικές γραμμές αλλά και οι στήλες με οδηγό είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα

*Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m \times n}$ ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Παρατήρηση: Στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, όχι μόνο οι μη μηδενικές γραμμές αλλά και οι στήλες με οδηγό είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Έστω ότι έχω κάποιο υποσύνολο $S \subseteq [n]$ κάποιων γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A.

Θεώρημα

*Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m \times n}$ ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Παρατήρηση: Στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, όχι μόνο οι μη μηδενικές γραμμές αλλά και οι στήλες με οδηγό είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Έστω ότι έχω κάποιο υποσύνολο $S \subseteq [n]$ κάποιων γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A. Αυτό σημαίνει ότι ο υποπίνακας $A_S \in K^{m \times |S|}$ του A

Θεώρημα

*Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m\times n}$ ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Παρατήρηση: Στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, όχι μόνο οι μη μηδενικές γραμμές αλλά και οι στήλες με οδηγό είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Έστω ότι έχω κάποιο υποσύνολο $S \subseteq [n]$ κάποιων γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A. Αυτό σημαίνει ότι ο υποπίνακας $A_S \in K^{m\times|S|}$ του A ικανοποιεί ότι $A_S x = 0$ έχει μοναδική λύση.

Θεώρημα

*Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m \times n}$ ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Παρατήρηση: Στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, όχι μόνο οι μη μηδενικές γραμμές αλλά και οι στήλες με οδηγό είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Έστω ότι έχω κάποιο υποσύνολο $S \subseteq [n]$ κάποιων γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A. Αυτό σημαίνει ότι ο υποπίνακας $A_S \in K^{m \times |S|}$ του A ικανοποιεί ότι $A_S x = 0$ έχει μοναδική λύση.Αν κάναμε τις ίδιες πράξεις που θα έκανε η απαλοιφή Gauss στον πίνακα A

Θεώρημα

*Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m\times n}$ ισούται με το **μέγιστο** πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του.*

Παρατήρηση: Στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, όχι μόνο οι μη μηδενικές γραμμές αλλά και οι στήλες με οδηγό είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Έστω ότι έχω κάποιο υποσύνολο $S \subseteq [n]$ κάποιων γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A. Αυτό σημαίνει ότι ο υποπίνακας $A_S \in K^{m\times|S|}$ του A ικανοποιεί ότι $A_S x = 0$ έχει μοναδική λύση.Αν κάναμε τις ίδιες πράξεις που θα έκανε η απαλοιφή Gauss στον πίνακα A θα κατέληγα στην ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή με αυτή του A με τη διαφορά ότι θα μου έλειπαν οι στήλες $j \notin S$.

Μια επισήμανση.

Καθώς κάνω απαλοιφή Gauss σε έναν πίνακα A για να βρεθώ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του ισχύουν δύο πράγματα:

Μια επισήμανση.

Καθώς κάνω απαλοιφή Gauss σε έναν πίνακα A για να βρεθώ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του ισχύουν δύο πράγματα:

- Ο χώρος που παράγουν οι γραμμές **δεν** αλλάζει.

Μια επισήμανση.

Καθώς κάνω απαλοιφή Gauss σε έναν πίνακα A για να βρεθώ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του ισχύουν δύο πράγματα:

- Ο χώρος που παράγουν οι γραμμές **δεν** αλλάζει.
- Ο χώρος που παράγουν οι στήλες **αλλάζει**,

Μια επισήμανση.

Καθώς κάνω απαλοιφή Gauss σε έναν πίνακα A για να βρεθώ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του ισχύουν δύο πράγματα:

- Ο χώρος που παράγουν οι γραμμές **δεν** αλλάζει.
- Ο χώρος που παράγουν οι στήλες **αλλάζει**, αλλά η διάστασή του δεν αλλάζει!

Μια επισήμανση.

Καθώς κάνω απαλοιφή Gauss σε έναν πίνακα A για να βρεθώ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του ισχύουν δύο πράγματα:

- Ο χώρος που παράγουν οι γραμμές **δεν** αλλάζει.
- Ο χώρος που παράγουν οι στήλες **αλλάζει**, αλλά η διάστασή του δεν αλλάζει!
- Έτσι, στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχω ότι ο χώρος που παράγουν οι στήλες και ο χώρος που παράγουν οι γραμμές είναι ίσες με το πλήθος των βασικών μεταβλητών

Μια επισήμανση.

Καθώς κάνω απαλοιφή Gauss σε έναν πίνακα A για να βρεθώ στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του ισχύουν δύο πράγματα:

- Ο χώρος που παράγουν οι γραμμές **δεν** αλλάζει.
- Ο χώρος που παράγουν οι στήλες **αλλάζει**, αλλά η διάστασή του δεν αλλάζει!
- Έτσι, στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχω ότι ο χώρος που παράγουν οι στήλες και ο χώρος που παράγουν οι γραμμές είναι ίσες με το πλήθος των βασικών μεταβλητών και η διάσταση του χώρου στηλών του A και η διάσταση του χώρου γραμμών του A είναι ίσες.

Άρα τρεις ισοδύναμες διατυπώσεις για τον βαθμό ενός πίνακα.

Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m \times n}$ ισούται με

- Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του A.
- Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A.
- Το μέγεθος της μεγαλύτερης μη μηδενικής υπο-ορίζουσας του A.
- Το πλήθος των βασικών μεταβλητών του A (πλήθος οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή).

Άρα τρεις ισοδύναμες διατυπώσεις για τον βαθμό ενός πίνακα.

Ο βαθμός ενός πίνακα $A \in K^{m \times n}$ ισούται με

- Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του A.
- Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A.
- Το μέγεθος της μεγαλύτερης μη μηδενικής υπο-ορίζουσας του A.
- Το πλήθος των βασικών μεταβλητών του A (πλήθος οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή).

$\star$ Χώρος γραμμών: η γραμμική θήκη των γραμμών του A $\star$ Χώρος στηλών: η γραμμική θήκη των στηλών του A

Ισοδύναμες διατυπώσεις: συνέχεια

$\star$ Βαθμός $A =$ το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του $A =$
η διάσταση του χώρου γραμμών του A (μέγεθος οποιαδήποτε βάσης του)

Ισοδύναμες διατυπώσεις: συνέχεια

⋆ Βαθμός $A =$ το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του $A =$
η διάσταση του χώρου γραμμών του A (μέγεθος οποιαδήποτε βάσης του)

⋆ Βαθμός $A =$ το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του $A =$
η διάσταση του στηλών του A (μέγεθος οποιαδήποτε βάσης του)

Ισοδύναμες διατυπώσεις: συνέχεια

⋆ Βαθμός $A =$ το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του $A =$
η διάσταση του χώρου γραμμών του A (μέγεθος οποιαδήποτε βάσης του)

⋆ Βαθμός $A =$ το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του $A =$
η διάσταση του στηλών του A (μέγεθος οποιαδήποτε βάσης του)

⋆ Ανεπίσημα, ο βαθμός του πίνακα εκφράζει τον ‘βαθμό πολυπλοκότητας’ του πίνακα και το πόσο ‘βαθμό πληροφορίας’ η απεικόνιση $T(x) = Ax$ διατηρεί.

Η διάσταση του μηδενοχώρου.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ και
$\ker(A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}$, $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m | \exists x : Ax = b\}$.

Η διάσταση του μηδενοχώρου.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ και
$\ker(A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}$, $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m | \exists x : Ax = b\}$.

Θεώρημα

$dim(\ker(A)) + dim(\mathrm{Col}(A)) = n$

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ και
$\ker(A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}$, $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m | \exists x : Ax = b\}$.

Θεώρημα

$dim(\ker(A)) + dim(\mathrm{Col}(A)) = n$ *ή ισοδύναμα*
$dim(\ker(A)) + rank(A) = n.$

Η διάσταση του μηδενοχώρου.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ και
$\ker(A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}$, $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m | \exists x : Ax = b\}$.

Θεώρημα

$dim(\ker(A)) + dim(\mathrm{Col}(A)) = n$ *ή ισοδύναμα*
$dim(\ker(A)) + rank(A) = n.$

⋆ Απόδειξη: Ο μηδενοχώρος του A είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων, όσων και οι ελεύθερες μεταβλητές του A.

Η διάσταση του μηδενοχώρου.

Έστω πίνακας $A \in K^{m \times n}$ και
$\ker(A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}$, $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m | \exists x : Ax = b\}$.

Θεώρημα

$dim(\ker(A)) + dim(\mathrm{Col}(A)) = n$ *ή ισοδύναμα*
$dim(\ker(A)) + rank(A) = n.$

⋆ Απόδειξη: Ο μηδενοχώρος του A είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων, όσων και οι ελεύθερες μεταβλητές του A. Άρα $dim(\ker(A)) =$ πλήθος ελεύθερων μεταβλητών

Η διάσταση του μηδενοχώρου.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ και
$\ker(A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}$, $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m | \exists x : Ax = b\}$.

Θεώρημα

$dim(\ker(A)) + dim(\mathrm{Col}(A)) = n$ *ή ισοδύναμα*
$dim(\ker(A)) + rank(A) = n.$

⋆ Απόδειξη: Ο μηδενοχώρος του A είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων, όσων και οι ελεύθερες μεταβλητές του A. Άρα $dim(\ker(A)) =$ πλήθος ελεύθερων μεταβλητών και $rank(A)$ ισούται με το πλήθος των βασικών μεταβλητών.

Η διάσταση του μηδενοχώρου.

Έστω πίνακας $A \in K^{m\times n}$ και
$\ker(A) = \{x \in K^n | Ax = 0\}$, $\mathrm{Col}(A) = \{b \in K^m | \exists x : Ax = b\}$.

Θεώρημα

$dim(\ker(A)) + dim(\mathrm{Col}(A)) = n$ *ή ισοδύναμα*
$dim(\ker(A)) + rank(A) = n.$

⋆ Απόδειξη: Ο μηδενοχώρος του A είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων, όσων και οι ελεύθερες μεταβλητές του A. Άρα $dim(\ker(A)) =$ πλήθος ελεύθερων μεταβλητών και $rank(A)$ ισούται με το πλήθος των βασικών μεταβλητών. Όμως ελεύθερες και βασικές μεταβλητές μαζί μας δίνουν όλες τις n μεταβλητές.

Πρόβλημα: Στην Αθήνα υπάρχουν m σύλλογοι και n άνθρωποι και ισχύει ότι

Πρόβλημα: Στην Αθήνα υπάρχουν m σύλλογοι και n άνθρωποι και ισχύει ότι

- Κάθε σύλλογος έχει περιττό πλήθος μελών,
- Κάθε δύο σύλλογοι έχουν το άρτιο πλήθος κοινών μελών,
- δεν υπάρχουν δύο σύλλογοι με ακριβώς τα ίδια μέλη.

Πρόβλημα: Στην Αθήνα υπάρχουν m σύλλογοι και n άνθρωποι και ισχύει ότι

- Κάθε σύλλογος έχει περιττό πλήθος μελών,
- Κάθε δύο σύλλογοι έχουν το άρτιο πλήθος κοινών μελών,
- δεν υπάρχουν δύο σύλλογοι με ακριβώς τα ίδια μέλη.

Να δειχθεί ότι $m \leq n$.

Φτιάχνουμε έναν πίνακα $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ ώστε $A_{ij} = 1$ αν και μόνο ο i-οστός σύλλογος έχει σαν μέλος τον j-οστό άνθρωπο.

Φτιάχνουμε έναν πίνακα $A \in \{0,1\}^{m\times n}$ ώστε $A_{ij} = 1$ αν και μόνο ο i-οστός σύλλογος έχει σαν μέλος τον j-οστό άνθρωπο.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Γραμμική Άλγεβρα και Διακριτά

Φτιάχνουμε έναν πίνακα $A \in \{0,1\}^{m\times n}$ ώστε $A_{ij} = 1$ αν και μόνο ο i-οστός σύλλογος έχει σαν μέλος τον j-οστό άνθρωπο.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να δείξω $m \leq n$ αρκεί να δείξω ότι οι γραμμές του A στον διανυσματικό χώρο με πρόσθεση το $\oplus$ και πολλαπλασιασμό το λογικό ΚΑΙ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητες*.

Φτιάχνουμε έναν πίνακα $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ ώστε $A_{ij} = 1$ αν και μόνο ο i-οστός σύλλογος έχει σαν μέλος τον j-οστό άνθρωπο.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να δείξω $m \leq n$ αρκεί να δείξω ότι οι γραμμές του A στον διανυσματικό χώρο με πρόσθεση το $\oplus$ και πολλαπλασιασμό το λογικό ΚΑΙ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητες*.

$\star$ Κάθε σύλλογος έχει περιττό πλήθος μελών $\Rightarrow$

Φτιάχνουμε έναν πίνακα $A \in \{0,1\}^{m\times n}$ ώστε $A_{ij} = 1$ αν και μόνο ο i-οστός σύλλογος έχει σαν μέλος τον j-οστό άνθρωπο.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να δείξω $m \le n$ αρκεί να δείξω ότι οι γραμμές του A στον διανυσματικό χώρο με πρόσθεση το $\oplus$ και πολλαπλασιασμό το λογικό ΚΑΙ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητες*.

$\star$ Κάθε σύλλογος έχει περιττό πλήθος μελών $\Rightarrow$ κάθε γραμμή έχει περιττό πλήθος 1.

Φτιάχνουμε έναν πίνακα $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ ώστε $A_{ij} = 1$ αν και μόνο ο i-οστός σύλλογος έχει σαν μέλος τον j-οστό άνθρωπο.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να δείξω $m \leq n$ αρκεί να δείξω ότι οι γραμμές του A στον διανυσματικό χώρο με πρόσθεση το $\oplus$ και πολλαπλασιασμό το λογικό ΚΑΙ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητες*.

$\star$ Κάθε σύλλογος έχει περιττό πλήθος μελών $\Rightarrow$ κάθε γραμμή έχει περιττό πλήθος 1.

$\star$ Κάθε δύο σύλλογοι έχουν άρτιο πλήθος κοινών μελών $\Rightarrow$

Φτιάχνουμε έναν πίνακα $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ ώστε $A_{ij} = 1$ αν και μόνο ο i-οστός σύλλογος έχει σαν μέλος τον j-οστό άνθρωπο.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να δείξω $m \leq n$ αρκεί να δείξω ότι οι γραμμές του A στον διανυσματικό χώρο με πρόσθεση το $\oplus$ και πολλαπλασιασμό το λογικό ΚΑΙ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητες*.

$\star$ Κάθε σύλλογος έχει περιττό πλήθος μελών $\Rightarrow$ κάθε γραμμή έχει περιττό πλήθος 1.

$\star$ Κάθε δύο σύλλογοι έχουν άρτιο πλήθος κοινών μελών $\Rightarrow$ το εσωτερικό γινόμενο κάθε δύο γραμμών είναι 0.

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Αρκεί να δείξω ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Αρκεί να δείξω ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0 \Rightarrow$$

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Αρκεί να δείξω ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0 \Rightarrow \langle v_1, c_1 v_1 + \ldots c_m v_m \rangle = 0$$

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Αρκεί να δείξω ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0 \Rightarrow \langle v_1, c_1 v_1 + \ldots c_m v_m \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \ldots + c_m \langle v_1, v_m \rangle = 0$$

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Αρκεί να δείξω ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0 \Rightarrow \langle v_1, c_1 v_1 + \ldots c_m v_m \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \ldots + c_m \langle v_1, v_m \rangle = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + \ldots + c_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Αρκεί να δείξω ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0 \Rightarrow \langle v_1, c_1 v_1 + \ldots c_m v_m \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \ldots + c_m \langle v_1, v_m \rangle = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + \ldots + c_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ (κάθε γραμμή έχει περιττό πλήθος 1)

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Αρκεί να δείξω ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0 \Rightarrow \langle v_1, c_1 v_1 + \ldots c_m v_m \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \ldots + c_m \langle v_1, v_m \rangle = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + \ldots + c_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ (κάθε γραμμή έχει περιττό πλήθος 1) και $\langle v_1, v_j \rangle = 0$ (κάθε δύο γραμμές έχουν άρτιο πλήθος κοινών 1).

Οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω $v_1, \ldots, v_m$ οι γραμμές και $c_1, \ldots, c_m \in \{0, 1\}$ ώστε

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0.$$

Αρκεί να δείξω ότι $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

$$c_1 v_1 + \ldots c_m v_m = 0 \Rightarrow \langle v_1, c_1 v_1 + \ldots c_m v_m \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \ldots + c_m \langle v_1, v_m \rangle = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 1 + \ldots + c_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ (κάθε γραμμή έχει περιττό πλήθος 1) και $\langle v_1, v_j \rangle = 0$ (κάθε δύο γραμμές έχουν άρτιο πλήθος κοινών 1). Όμοια $c_2 = \ldots = c_m = 0$. Άρα οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες! Τέλος!

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Τον ορισμό του βαθμού πίνακα.
- Ότι ισούται με το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών και με το μεγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του πίνακα.
- Ότι η διάσταση του μηδενοχώρου του $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ισούται με $n - \mathrm{rank}(A)$ και με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!