Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Τέταρτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμμική Ανεξαρτησίας σε Διανυσματικούς Χώρους.

Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K. Τότε τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ λέμε ότι είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν (τουλάχιστον) ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές στο K των υπολοίπων.

Γραμμική Ανεξαρτησίας σε Διανυσματικούς Χώρους.

Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K. Τότε τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ λέμε ότι είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν (τουλάχιστον) ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές στο K των υπολοίπων.

Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K. Τότε τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ λέμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο δεν υπάρχουν $c_1, c_2, \ldots, c_p \in K$ όχι όλα μηδέν έτσι ώστε

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_p a_p = 0.$$

Γραμμική Ανεξαρτησίας σε Διανυσματικούς Χώρους.

Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K. Τότε τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ λέμε ότι είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν (τουλάχιστον) ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός με συντελεστές στο K των υπολοίπων.

Έστω διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K. Τότε τα διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$ λέμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο δεν υπάρχουν $c_1, c_2, \ldots, c_p \in K$ όχι όλα μηδέν έτσι ώστε

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_p a_p = 0.$$

$\star$ Όπως έχουμε ήδη δει: $a_1, \ldots, a_p$ γραμμικώς ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ κάθε $u \in \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ έχει *μοναδική* γραφή.

Παραδείγματα γραμμικής εξάρτησης.

I. Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένοι καθώς $A_3 = 3A_1 - 2A_2$.

Παραδείγματα γραμμικής εξάρτησης.

I. Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένοι καθώς $A_3 = 3A_1 - 2A_2$.

II. Τα εξής διανύσματα τα οποία ανήκουν στον διανυσματικό χώρο των διανυσμάτων μήκους 3 με πρόσθεση το $\oplus$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Παραδείγματα γραμμικής εξάρτησης.

I. Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένοι καθώς $A_3 = 3A_1 - 2A_2$.

II. Τα εξής διανύσματα τα οποία ανήκουν στον διανυσματικό χώρο των διανυσμάτων μήκους 3 με πρόσθεση το $\oplus$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα καθώς $u_3 = u_1 + u_2$ $(u_3 = u_1 \oplus u_2)$

Παραδείγματα γραμμικής εξάρτησης.

I. Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένοι καθώς $A_3 = 3A_1 - 2A_2$.

II. Τα εξής διανύσματα τα οποία ανήκουν στον διανυσματικό χώρο των διανυσμάτων μήκους 3 με πρόσθεση το $\oplus$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα καθώς $u_3 = u_1 + u_2 \ (u_3 = u_1 \oplus u_2)$.

$$u_3 = u_1 + u_2 \Rightarrow$$

Παραδείγματα γραμμικής εξάρτησης.

I. Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένοι καθώς $A_3 = 3A_1 - 2A_2$.

II. Τα εξής διανύσματα τα οποία ανήκουν στον διανυσματικό χώρο των διανυσμάτων μήκους 3 με πρόσθεση το $\oplus$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα καθώς $u_3 = u_1 + u_2$ $\left(u_3 = u_1 \oplus u_2\right)$.

$$u_3 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 + (-u_1) = (-u_1) + u_2 + u_3 \Rightarrow$$

Παραδείγματα γραμμικής εξάρτησης.

I. Οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένοι καθώς $A_3 = 3A_1 - 2A_2$.

II. Τα εξής διανύσματα τα οποία ανήκουν στον διανυσματικό χώρο των διανυσμάτων μήκους 3 με πρόσθεση το $\oplus$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα καθώς $u_3 = u_1 + u_2 \ (u_3 = u_1 \oplus u_2)$.

$$u_3 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 + (-u_1) = (-u_1) + u_2 + u_3 \Rightarrow 0 = u_1 + u_2 + u_3.$$

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Εξάρτησης.

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές. Τότε τα πολυώνυμα

$$t, t^2 + t, t^3, t^3 + t^2 + 2t$$

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Εξάρτησης.

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές. Τότε τα πολυώνυμα

$$t, t^2 + t, t^3, t^3 + t^2 + 2t$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Εξάρτησης.

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές. Τότε τα πολυώνυμα

$$t, t^2 + t, t^3, t^3 + t^2 + 2t$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

⋆ Οι συναρτήσεις

$$\text{συν}(2x), \text{ημ}^2(x), \text{συν}^2(x)$$

Άλλα Παραδείγματα Γραμμικής Εξάρτησης.

⋆ Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3 με πραγματικούς συντελεστές. Τότε τα πολυώνυμα

$$t, t^2 + t, t^3, t^3 + t^2 + 2t$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
⋆ Οι συναρτήσεις

$$\text{συν}(2x), \text{ημ}^2(x), \text{συν}^2(x)$$

από την ιδιότητα $\text{συν}(2x) = \text{ημ}^2(x) - \text{συν}^2(x)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

Ένα γνώριμο ερώτημα.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K και ένα σύνολο διανυσμάτων $S := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq V$.

Ένα γνώριμο ερώτημα.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K και ένα σύνολο διανυσμάτων $S := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq V$.Το $span(S)$ είναι **γραμμικός υποχώρος** του V.

Ένα γνώριμο ερώτημα.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K και ένα σύνολο διανυσμάτων $S := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq V$.Το $span(S)$ είναι **γραμμικός υποχώρος** του V.

Δημιουργία γραμμικής ανεξαρτησίας: Όσο υπάρχει ένα διάνυσμα $a_j \in S$ το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, θέτουμε

Ένα γνώριμο ερώτημα.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K και ένα σύνολο διανυσμάτων $S := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq V$.Το $span(S)$ είναι **γραμμικός υποχώρος** του V.

Δημιουργία γραμμικής ανεξαρτησίας: Όσο υπάρχει ένα διάνυσμα $a_j \in S$ το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, θέτουμε $S := S \setminus \{a_j\}$.

Ένα γνώριμο ερώτημα.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K και ένα σύνολο διανυσμάτων $S := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq V$.Το $span(S)$ είναι **γραμμικός υποχώρος** του V.

Δημιουργία γραμμικής ανεξαρτησίας: Όσο υπάρχει ένα διάνυσμα $a_j \in S$ το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, θέτουμε $S := S \setminus \{a_j\}$. Η γραμμική θήκη των διανυσμάτων **δεν** αλλάζει, και έτσι η αρχική γραμμική θήκη είναι ίδια με την τελική.

Ένα γνώριμο ερώτημα.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K και ένα σύνολο διανυσμάτων $S := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq V$.Το $span(S)$ είναι **γραμμικός υποχώρος** του V.

Δημιουργία γραμμικής ανεξαρτησίας: Όσο υπάρχει ένα διάνυσμα $a_j \in S$ το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, θέτουμε $S := S \setminus \{a_j\}$. Η γραμμική θήκη των διανυσμάτων **δεν** αλλάζει, και έτσι η αρχική γραμμική θήκη είναι ίδια με την τελική.

Είναι αυτό το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε;

Ένα γνώριμο ερώτημα.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V πάνω σε ένα σώμα K και ένα σύνολο διανυσμάτων $S := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq V$.Το $span(S)$ είναι **γραμμικός υποχώρος** του V.

Δημιουργία γραμμικής ανεξαρτησίας: Όσο υπάρχει ένα διάνυσμα $a_j \in S$ το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, θέτουμε $S := S \setminus \{a_j\}$. Η γραμμική θήκη των διανυσμάτων **δεν** αλλάζει, και έτσι η αρχική γραμμική θήκη είναι ίδια με την τελική.

Είναι αυτό το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε; Δηλαδή, καταλήξαμε στο μικρότερο δυνατό σύνολο διανυσμάτων που έχει την ίδια γραμμική θήκη με το αρχικό σύνολο;

Η έννοια της βάσης.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$

Η έννοια της βάσης.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Η έννοια της βάσης.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Από το προηγούμενο επιχείρημα, *κάθε* υποχώρος έχει τουλάχιστον μία βάση.

Η έννοια της βάσης.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Από το προηγούμενο επιχείρημα, *κάθε* υποχώρος έχει τουλάχιστον μία βάση.

$\star$ Η πρόσθεση ενός στοιχείου $u \in V$ σε μία βάση $\mathcal{B}$ του V δίνει ένα σύνολο το οποίο **δεν** είναι βάση V, καθώς χαλάει το (2) !

Η έννοια της βάσης.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Από το προηγούμενο επιχείρημα, *κάθε* υποχώρος έχει τουλάχιστον μία βάση.
⋆ Η πρόσθεση ενός στοιχείου $u \in V$ σε μία βάση $\mathcal{B}$ του V δίνει ένα σύνολο το οποίο **δεν** είναι βάση V, καθώς χαλάει το (2) !

⋆ Η αφαίρεση ενός στοιχείου από μια βάση $\mathcal{B}$ του V δίνει ένα σύνολο το οποίο **δεν** είναι βάση του V

Η έννοια της βάσης.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\text{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Από το προηγούμενο επιχείρημα, *κάθε* υποχώρος έχει τουλάχιστον μία βάση.

$\star$ Η πρόσθεση ενός στοιχείου $u \in V$ σε μία βάση $\mathcal{B}$ του V δίνει ένα σύνολο το οποίο **δεν** είναι βάση V, καθώς χαλάει το (2) !

$\star$ Η αφαίρεση ενός στοιχείου από μια βάση $\mathcal{B}$ του V δίνει ένα σύνολο το οποίο **δεν** είναι βάση του V, καθώς χαλάει το (1)

Η έννοια της βάσης.

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τα διανύσματα $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ λέμε ότι είναι *βάση* του V αν

1. $\text{span}(\mathcal{B}) = V$
2. Τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Από το προηγούμενο επιχείρημα, *κάθε* υποχώρος έχει τουλάχιστον μία βάση.
$\star$ Η πρόσθεση ενός στοιχείου $u \in V$ σε μία βάση $\mathcal{B}$ του V δίνει ένα σύνολο το οποίο **δεν** είναι βάση V, καθώς χαλάει το (2) !

$\star$ Η αφαίρεση ενός στοιχείου από μια βάση $\mathcal{B}$ του V δίνει ένα σύνολο το οποίο **δεν** είναι βάση του V, καθώς χαλάει το (1) (ωστόσο είναι βάση κάποιου υποχώρου του V).

Παραδείγματα βάσεων.

⋆ Στο $\mathbb{R}^2$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

Παραδείγματα βάσεων.

⋆ Στο $\mathbb{R}^2$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

Παραδείγματα βάσεων.

⋆ Στο $\mathbb{R}^2$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Παραδείγματα βάσεων.

⋆ Στο $\mathbb{R}^2$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

⋆ Στο $\mathbb{R}^3$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

Παραδείγματα βάσεων.

⋆ Στο $\mathbb{R}^2$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

⋆ Στο $\mathbb{R}^3$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

Παραδείγματα βάσεων.

⋆ Στο $\mathbb{R}^2$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

⋆ Στο $\mathbb{R}^3$ οποιοδήποτε από τα παρακάτω σύνολα είναι βάση:

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \right\}$$

⋆ Τα σύνολα πολυωνύμων $\{1, t, t^2, t^3\}$ και $\{1+t, t, 10t^2, (t+3)^3\}$ είναι βάσεις του χώρου των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3.

Συνέχεια παραδειγμάτων.

Το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων $n \times n$ με πραγματικούς συντελεστές **είναι** διανυσματικός χώρος, και

Συνέχεια παραδειγμάτων.

Το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων $n \times n$ με πραγματικούς συντελεστές **είναι** διανυσματικός χώρος, και για $n = 2$ μια βάση του είναι

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \right\}$$

Το σύνολο των άνω τριγωνικών πινάκων $n \times n$ με πραγματικούς συντελεστές **είναι** διανυσματικός χώρος, και για $n = 2$ μια βάση του είναι

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \right\}$$

καθώς κάθε άνω τριγωνικός πίνακας είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έλεγχος βάσης στον K^m.

Ερώτημα: Πως θα ελέγχαμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq K^m$ είναι βάση του K^m ; Φτιάχνουμε έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$.

Έλεγχος βάσης στον K^m.

Ερώτημα: Πως θα ελέγχαμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq K^m$ είναι βάση του K^m ; Φτιάχνουμε έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$. Ο πίνακας είναι $m \times |\mathcal{B}|$.

1. Έλεγχος Γραμμικής Ανεξαρτησία $\Leftrightarrow$

Έλεγχος βάσης στον K^m.

Ερώτημα: Πως θα ελέγχαμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq K^m$ είναι βάση του K^m ; Φτιάχνουμε έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$. Ο πίνακας είναι $m \times |\mathcal{B}|$.

1. Έλεγχος Γραμμικής Ανεξαρτησία $\Leftrightarrow$ Πρέπει $Ax = 0$ να έχει μοναδική λύση.

Έλεγχος βάσης στον K^m.

Ερώτημα: Πως θα ελέγχαμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq K^m$ είναι βάση του K^m ; Φτιάχνουμε έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$. Ο πίνακας είναι $m \times |\mathcal{B}|$.

1. Έλεγχος Γραμμικής Ανεξαρτησία $\Leftrightarrow$ Πρέπει $Ax = 0$ να έχει μοναδική λύση.
2. Έλεγχος αν παράγεται όλος ο χώρος
   ή ισοδύναμα

Έλεγχος βάσης στον K^m.

Ερώτημα: Πως θα ελέγχαμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq K^m$ είναι βάση του K^m ; Φτιάχνουμε έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$. Ο πίνακας είναι $m \times |\mathcal{B}|$.

1. Έλεγχος Γραμμικής Ανεξαρτησία $\Leftrightarrow$ Πρέπει $Ax = 0$ να έχει μοναδική λύση.
2. Έλεγχος αν παράγεται όλος ο χώρος
   ή ισοδύναμα
   (Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι επί στον K^m)

Έλεγχος βάσης στον K^m.

Ερώτημα: Πως θα ελέγχαμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq K^m$ είναι βάση του K^m ; Φτιάχνουμε έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$. Ο πίνακας είναι $m \times |\mathcal{B}|$.

1. Έλεγχος Γραμμικής Ανεξαρτησία $\Leftrightarrow$ Πρέπει $Ax = 0$ να έχει μοναδική λύση.
2. Έλεγχος αν παράγεται όλος ο χώρος
   ή ισοδύναμα
   (Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι επί στον K^m)
   ή ισοδύναμα
   Ο βαθμός του A (πλήθος βασικών μεταβλητών) ισούται με m.

Έλεγχος βάσης στον K^m.

Ερώτημα: Πως θα ελέγχαμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq K^m$ είναι βάση του K^m ; Φτιάχνουμε έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$. Ο πίνακας είναι $m \times |\mathcal{B}|$.

1. Έλεγχος Γραμμικής Ανεξαρτησία $\Leftrightarrow$ Πρέπει $Ax = 0$ να έχει μοναδική λύση.
2. Έλεγχος αν παράγεται όλος ο χώρος
   ή ισοδύναμα
   (Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι επί στον K^m)
   ή ισοδύναμα
   Ο βαθμός του A (πλήθος βασικών μεταβλητών) ισούται με m.

$\star$ Ισοδύναμα, πρέπει ο A να είναι *αντιστρέψιμος* πάνω στο σώμα K.

Έλεγχος βάσης στον K^m.

Ερώτημα: Πως θα ελέγχαμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} \subseteq K^m$ είναι βάση του K^m ; Φτιάχνουμε έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα του $\mathcal{B}$. Ο πίνακας είναι $m \times |\mathcal{B}|$.

1. Έλεγχος Γραμμικής Ανεξαρτησία $\Leftrightarrow$ Πρέπει $Ax = 0$ να έχει μοναδική λύση.
2. Έλεγχος αν παράγεται όλος ο χώρος
   ή ισοδύναμα
   (Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι επί στον K^m)
   ή ισοδύναμα
   Ο βαθμός του A (πλήθος βασικών μεταβλητών) ισούται με m.

⋆ Ισοδύναμα, πρέπει ο A να είναι *αντιστρέψιμος* πάνω στο σώμα K.
⋆ Κάθε βάση του K^m πρέπει να έχει **ακριβώς** m διανύσματα.

Βασικό Θεώρημα πάνω στις βάσεις.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Βασικό Θεώρημα πάνω στις βάσεις.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Άρα επιτέλους λύσαμε και το πρόβλημα του Πανοραμίξ από την πρώτη διάλεξη:

Βασικό Θεώρημα πάνω στις βάσεις.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Άρα επιτέλους λύσαμε και το πρόβλημα του Πανοραμίξ από την πρώτη διάλεξη:
είχε κάποια διανύσματα και ήθελε να πάρει το **ελάχιστο** πλήθος από αυτά ώστε να διατηρείται η γραμμική τους θήκη.

Βασικό Θεώρημα πάνω στις βάσεις.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Άρα επιτέλους λύσαμε και το πρόβλημα του Πανοραμίξ από την πρώτη διάλεξη:
είχε κάποια διανύσματα και ήθελε να πάρει το **ελάχιστο** πλήθος από αυτά ώστε να διατηρείται η γραμμική τους θήκη.

Όσο μπορεί να βρει ένα γραμμικώς εξαρτημένο διάνυσμα, το πετάει και συνεχίζει!

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Άρα επιτέλους λύσαμε και το πρόβλημα του Πανοραμίξ από την πρώτη διάλεξη:
είχε κάποια διανύσματα και ήθελε να πάρει το **ελάχιστο** πλήθος από αυτά ώστε να διατηρείται η γραμμική τους θήκη.

Όσο μπορεί να βρει ένα γραμμικώς εξαρτημένο διάνυσμα, το πετάει και συνεχίζει! Αν W η γραμμική θήκη των αρχικών διανυσμάτων, τότε W θα είναι και η τελική και επίσης W διανυσματικός χώρος.

Βασικό Θεώρημα πάνω στις βάσεις.

Θεώρημα

*Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το **ίδιο** πλήθος στοιχείων.*

Άρα επιτέλους λύσαμε και το πρόβλημα του Πανοραμίξ από την πρώτη διάλεξη:
είχε κάποια διανύσματα και ήθελε να πάρει το **ελάχιστο** πλήθος από αυτά ώστε να διατηρείται η γραμμική τους θήκη.

Όσο μπορεί να βρει ένα γραμμικώς εξαρτημένο διάνυσμα, το πετάει και συνεχίζει! Αν W η γραμμική θήκη των αρχικών διανυσμάτων, τότε W θα είναι και η τελική και επίσης W διανυσματικός χώρος.Τα τελικά διανύσματα αποτελούν **βάση** του W άρα είναι και το ελάχιστο σύνολο που παράγει όλο τον W!

Βασικό Θεώρημα πάνω στις βάσεις.

Θεώρημα

*Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το **ίδιο** πλήθος στοιχείων.*

Άρα επιτέλους λύσαμε και το πρόβλημα του Πανοραμίξ από την πρώτη διάλεξη:
είχε κάποια διανύσματα και ήθελε να πάρει το **ελάχιστο** πλήθος από αυτά ώστε να διατηρείται η γραμμική τους θήκη.

Όσο μπορεί να βρει ένα γραμμικώς εξαρτημένο διάνυσμα, το πετάει και συνεχίζει! Αν W η γραμμική θήκη των αρχικών διανυσμάτων, τότε W θα είναι και η τελική και επίσης W διανυσματικός χώρος.Τα τελικά διανύσματα αποτελούν **βάση** του W άρα είναι και το ελάχιστο σύνολο που παράγει όλο τον W!

Η βασική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Θεώρημα

*Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το **ίδιο** πλήθος στοιχείων.*

Η βασική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Επιχείρημα ανταλλαγής: Έστω $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ μια βάση του B και ένα $w \in V \setminus \{0\}$.

Η βασική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Επιχείρημα ανταλλαγής: Έστω $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ μια βάση του B και ένα $w \in V \setminus \{0\}$. Τότε μπορώ να αντικαταστήσω κάποιο a_i με το w ώστε το σύνολο να παραμένει βάση!

Η βασική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Θεώρημα

*Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το **ίδιο** πλήθος στοιχείων.*

Επιχείρημα ανταλλαγής: Έστω $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ μια βάση του B και ένα $w \in V \setminus \{0\}$. Τότε μπορώ να αντικαταστήσω κάποιο a_i με το w ώστε το σύνολο να παραμένει βάση! Δηλαδή, για κάθε w υπάρχει ένα i ώστε $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, w, a_{i+1}, \ldots a_k\}$ να παραμένει βάση!

Η βασική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Επιχείρημα ανταλλαγής: Έστω $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ μια βάση του B και ένα $w \in V \setminus \{0\}$. Τότε μπορώ να αντικαταστήσω κάποιο a_i με το w ώστε το σύνολο να παραμένει βάση! Δηλαδή, για κάθε w υπάρχει ένα i ώστε $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, w, a_{i+1}, \ldots a_k\}$ να παραμένει βάση!

Αν είχα δύο βάσεις με διαφορετικό αριθμό στοιχείων θα εφάρμοζα το επιχείρημα ανταλλαγής για να μεταμορφώσω την μικρότερη από τις δύο σε μια βάση που είναι *υποσύνολο* της δεύτερης βάσης!

Η βασική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Θεώρημα

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το ***ίδιο*** *πλήθος στοιχείων.*

Επιχείρημα ανταλλαγής: Έστω $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ μια βάση του B και ένα $w \in V \setminus \{0\}$. Τότε μπορώ να αντικαταστήσω κάποιο a_i με το w ώστε το σύνολο να παραμένει βάση! Δηλαδή, για κάθε w υπάρχει ένα i ώστε $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, w, a_{i+1}, \ldots a_k\}$ να παραμένει βάση!

Αν είχα δύο βάσεις με διαφορετικό αριθμό στοιχείων θα εφάρμοζα το επιχείρημα ανταλλαγής για να μεταμορφώσω την μικρότερη από τις δύο σε μια βάση που είναι *υποσύνολο* της δεύτερης βάσης!Όμως δεν γίνεται να έχουμε δύο βάσεις ώστε η πρώτη να είναι υποσύνολο της δεύτερης,

Η βασική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος.

Θεώρημα

*Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Τότε όλες οι βάσεις του V έχουν το **ίδιο** πλήθος στοιχείων.*

Επιχείρημα ανταλλαγής: Έστω $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ μια βάση του B και ένα $w \in V \setminus \{0\}$. Τότε μπορώ να αντικαταστήσω κάποιο a_i με το w ώστε το σύνολο να παραμένει βάση! Δηλαδή, για κάθε w υπάρχει ένα i ώστε $\{a_1, \ldots, a_{i-1}, w, a_{i+1}, \ldots a_k\}$ να παραμένει βάση!

Αν είχα δύο βάσεις με διαφορετικό αριθμό στοιχείων θα εφάρμοζα το επιχείρημα ανταλλαγής για να μεταμορφώσω την μικρότερη από τις δύο σε μια βάση που είναι *υποσύνολο* της δεύτερης βάσης!Όμως δεν γίνεται να έχουμε δύο βάσεις ώστε η πρώτη να είναι υποσύνολο της δεύτερης, γιατί προσθέτοντας ένα στοιχείο σε μία βάση χαλάμε τη γραμμική ανεξαρτησία!

Διάσταση χώρου.

Ορισμός: Η διαστάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι το πλήθος των στοιχείων σε οποιαδήποτε βάση του V και συμβολίζεται με $dim(V)$.

Διάσταση χώρου.

Ορισμός: Η διαστάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι το πλήθος των στοιχείων σε οποιαδήποτε βάση του V και συμβολίζεται με $dim(V)$.

Προσοχή: Υπάρχουν χώροι όπου $dim(V) = \infty$ αλλά σε αυτό το μάθημα μας ενδιαφέρουν χώροι *πεπερασμένης* διάστασης.

Διάσταση χώρου.

Ορισμός: Η διαστάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι το πλήθος των στοιχείων σε οποιαδήποτε βάση του V και συμβολίζεται με $dim(V)$.

Προσοχή: Υπάρχουν χώροι όπου $dim(V) = \infty$ αλλά σε αυτό το μάθημα μας ενδιαφέρουν χώροι *πεπερασμένης* διάστασης.

⊙ Μια βάση του V επίσης έχει δύο ερμηνείες:

Διάσταση χώρου.

Ορισμός: Η διαστάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι το πλήθος των στοιχείων σε οποιαδήποτε βάση του V και συμβολίζεται με $dim(V)$.

Προσοχή: Υπάρχουν χώροι όπου $dim(V) = \infty$ αλλά σε αυτό το μάθημα μας ενδιαφέρουν χώροι *πεπερασμένης* διάστασης.

⊙ Μια βάση του V επίσης έχει δύο ερμηνείες:

- Το **ελάχιστο** πλήθος διανυσμάτων τα οποία παράγουν όλο τον χώρο.

Διάσταση χώρου.

Ορισμός: Η διαστάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι το πλήθος των στοιχείων σε οποιαδήποτε βάση του V και συμβολίζεται με $dim(V)$.

Προσοχή: Υπάρχουν χώροι όπου $dim(V) = \infty$ αλλά σε αυτό το μάθημα μας ενδιαφέρουν χώροι *πεπερασμένης* διάστασης.

⊙ Μια βάση του V επίσης έχει δύο ερμηνείες:

- Το **ελάχιστο** πλήθος διανυσμάτων τα οποία παράγουν όλο τον χώρο.
- Το **μέγιστο** πλήθος διανυσμάτων του V τα οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Κατηγοριοποίηση με βάση τη διάσταση.

Άρα μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους υποχώρους W ενός διανυσματικού χώρου V ανάλογα με τη διάστασή τους! Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^3$

Κατηγοριοποίηση με βάση τη διάσταση.

Άρα μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους υποχώρους W ενός διανυσματικού χώρου V ανάλογα με τη διάστασή τους! Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^3$

1. Το σύνολο $\{0\}$ είναι η αρχή των αξόνων και έχει διάσταση 0.

Κατηγοριοποίηση με βάση τη διάσταση.

Άρα μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους υποχώρους W ενός διανυσματικού χώρου V ανάλογα με τη διάστασή τους! Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^3$

1. Το σύνολο $\{0\}$ είναι η αρχή των αξόνων και έχει διάσταση 0.
2. Κάθε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 1.

Κατηγοριοποίηση με βάση τη διάσταση.

Άρα μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους υποχώρους W ενός διανυσματικού χώρου V ανάλογα με τη διάστασή τους! Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^3$

1. Το σύνολο $\{0\}$ είναι η αρχή των αξόνων και έχει διάσταση 0.
2. Κάθε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 1.
3. Κάθε επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 2.

Κατηγοριοποίηση με βάση τη διάσταση.

Άρα μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους υποχώρους W ενός διανυσματικού χώρου V ανάλογα με τη διάστασή τους! Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^3$

1. Το σύνολο $\{0\}$ είναι η αρχή των αξόνων και έχει διάσταση 0.
2. Κάθε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 1.
3. Κάθε επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 2.
   $\star$ Θυμηθείτε ότι είχαμε πει ότι κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων είναι ένα σύνολο της μορφής

$$\{(x, y, z) : 2x + 3y - z = 0\}$$

Κατηγοριοποίηση με βάση τη διάσταση.

Άρα μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους υποχώρους W ενός διανυσματικού χώρου V ανάλογα με τη διάστασή τους! Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^3$

1. Το σύνολο $\{0\}$ είναι η αρχή των αξόνων και έχει διάσταση 0.
2. Κάθε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 1.
3. Κάθε επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 2.
   $\star$ Θυμηθείτε ότι είχαμε πει ότι κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων είναι ένα σύνολο της μορφής

   $$\{(x, y, z) : 2x + 3y - z = 0\}$$

   Αυτό είναι διάστασης $2 =$ πλήθος ελεύθερων μεταβλητών του πίνακα $[2 \;\; 3 \;\; -1]$.

Κατηγοριοποίηση με βάση τη διάσταση.

Άρα μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τους υποχώρους W ενός διανυσματικού χώρου V ανάλογα με τη διάστασή τους! Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^3$

1. Το σύνολο $\{0\}$ είναι η αρχή των αξόνων και έχει διάσταση 0.
2. Κάθε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 1.
3. Κάθε επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων είναι υποχώρος διάστασης 2.
   $\star$ Θυμηθείτε ότι είχαμε πει ότι κάθε επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων είναι ένα σύνολο της μορφής

   $$\{(x, y, z) : 2x + 3y - z = 0\}$$

   Αυτό είναι διάστασης $2 =$ πλήθος ελεύθερων μεταβλητών του πίνακα $[2 \;\; 3 \;\; -1]$.
4. Το $\mathbb{R}^3$ είναι ο μοναδικός υποχώρος διάστασης 3.

Παράδειγμα Ι.

Οι στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$;

Παράδειγμα Ι.

Οι στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$; Πρέπει να ελέγχξω γραμμική ανεξαρτησία στηλών και ότι παράγεται όλος ο χώρος.

Παράδειγμα Ι.

Οι στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$; Πρέπει να ελέγχξω γραμμική ανεξαρτησία στηλών και ότι παράγεται όλος ο χώρος.
Το πρώτο σημαίνει να δω αν $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση και το δεύτερο αν υπάρχουν 4 βασικές μεταβλητές.

Παράδειγμα Ι.

Οι στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$; Πρέπει να ελέγχξω γραμμική ανεξαρτησία στηλών και ότι παράγεται όλος ο χώρος.
Το πρώτο σημαίνει να δω αν $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση και το δεύτερο αν υπάρχουν 4 βασικές μεταβλητές.
Ισοδύναμα, αρκεί να υπάρχουν 0 ελεύθερες μεταβλητές και 4 βασικές,

Παράδειγμα Ι.

Οι στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$; Πρέπει να ελέγχξω γραμμική ανεξαρτησία στηλών και ότι παράγεται όλος ο χώρος.
Το πρώτο σημαίνει να δω αν $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση και το δεύτερο αν υπάρχουν 4 βασικές μεταβλητές.
Ισοδύναμα, αρκεί να υπάρχουν 0 ελεύθερες μεταβλητές και 4 βασικές, άρα απαλοιφή Gauss.

Στην προκειμένη, εφόσον έχουμε 4 στήλες στον $\mathbb{R}^4$ αρκεί A να είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα ΙΙ.

Να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου $\mathrm{Null}(A) = \{x : Ax = 0\}$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα ΙΙ.

Να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου $\mathrm{Null}(A) = \{x : Ax = 0\}$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Παράδειγμα II.

Να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου $\mathrm{Null}(A) = \{x : Ax = 0\}$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και κάθε $x \in \mathrm{Null}(A)$ έχει τη μορφή

$$x = t \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -3/ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_2}$$

Παράδειγμα II.

Να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου $\mathrm{Null}(A) = \{x : Ax = 0\}$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και κάθε $x \in \mathrm{Null}(A)$ έχει τη μορφή

$$x = t \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -3/ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_2}$$

Τα $\{a_1, a_2\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα είναι βάση!

Γενικός Κανόνας.

Για να βρω μια διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V αρκεί να βρω ένα σύνολο διανυσμάτων το οποίο είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** και τα οποία παράγουν όλο τον χώρο.

Γενικός Κανόνας.

Για να βρω μια διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V αρκεί να βρω ένα σύνολο διανυσμάτων το οποίο είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** και τα οποία παράγουν όλο τον χώρο.

Ποια είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των διαγώνιων 3×3 πινάκων;

Γενικός Κανόνας.

Για να βρω μια διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V αρκεί να βρω ένα σύνολο διανυσμάτων το οποίο είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** και τα οποία παράγουν όλο τον χώρο.

Ποια είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των διαγώνιων 3×3 πινάκων;

Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γενικός Κανόνας.

Για να βρω μια διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V αρκεί να βρω ένα σύνολο διανυσμάτων το οποίο είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** και τα οποία παράγουν όλο τον χώρο.

Ποια είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των διαγώνιων 3×3 πινάκων;

Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι και κάθε διαγώνιος πίνακας γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους. Άρα η διάσταση του χώρου είναι 3.

Κι άλλο παράδειγμα.

Ποια είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των 3×3 πινάκων που ικανοποιούν $A = A^T$;

Κι άλλο παράδειγμα.

Ποια είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των 3×3 πινάκων που ικανοποιούν $A = A^T$;

$$A = A^T \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix}$$

Κι άλλο παράδειγμα.

Ποια είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου των 3×3 πινάκων που ικανοποιούν $A = A^T$;

$$A = A^T \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix}$$

Μπορώ να γράψω κάθε πίνακα ως γραμμικό συνδυασμό 6 πινάκων, άρα η διάσταση του χώρου είναι 6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Τι είναι η βάση ενός χώρου.
- Ότι όλες οι βάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων και αυτός ο αριθμός ονομάζεται διάσταση του χώρου.
- Πως εξετάζω αν ένα σύνολο διανυσμάτων αποτελούν βάση του K^m.
- Πως βρίσκω μια βάση για τον μηδενοχώρο ενός πίνακα.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!