Γραμμική Άλγεβρα

Ενδέκατη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διευκρινίσεις.

⋆ Όταν έχουμε έναν (ενδεχομένως επαυξημένο) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και κάνουμε απαλοιφή Gauss για να πάμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

Διευκρινίσεις.

⋆ Όταν έχουμε έναν (ενδεχομένως επαυξημένο) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και κάνουμε απαλοιφή Gauss για να πάμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

- Αν μια γραμμή βγει όλη μηδέν, *καλύτερα* να μην την πετάμε, αλλά να την βάζουμε τελευταία, για αποφυγή λαθών.

Διευκρινίσεις.

⋆ Όταν έχουμε έναν (ενδεχομένως επαυξημένο) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και κάνουμε απαλοιφή Gauss για να πάμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

- Αν μια γραμμή βγει όλη μηδέν, *καλύτερα* να μην την πετάμε, αλλά να την βάζουμε τελευταία, για αποφυγή λαθών. Το τι σκάλα δμιουργείται (που είναι οι οδηγοί) το κοιτάμε μόνο στις *μη μηδενικές* γραμμές.

Διευκρινίσεις.

⋆ Όταν έχουμε έναν (ενδεχομένως επαυξημένο) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και κάνουμε απαλοιφή Gauss για να πάμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

- Αν μια γραμμή βγει όλη μηδέν, *καλύτερα* να μην την πετάμε, αλλά να την βάζουμε τελευταία, για αποφυγή λαθών. Το τι σκάλα δημιουργείται (που είναι οι οδηγοί) το κοιτάμε μόνο στις *μη μηδενικές* γραμμές.
- Έτσι αν ο αρχικός πίνακας έχει 5 γραμμές, και ο τελικός θα έχει 5 γραμμές, ενδεχομένως με κάποιες μηδενικές.

Διευκρινίσεις.

⋆ Όταν έχουμε έναν (ενδεχομένως επαυξημένο) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και κάνουμε απαλοιφή Gauss για να πάμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

- Αν μια γραμμή βγει όλη μηδέν, *καλύτερα* να μην την πετάμε, αλλά να την βάζουμε τελευταία, για αποφυγή λαθών. Το τι σκάλα δημιουργείται (που είναι οι οδηγοί) το κοιτάμε μόνο στις *μη μηδενικές* γραμμές.
- Έτσι αν ο αρχικός πίνακας έχει 5 γραμμές, και ο τελικός θα έχει 5 γραμμές, ενδεχομένως με κάποιες μηδενικές.
- Τις μηδενικές γραμμές μπορούμε να τις αγνοήσουμε μόνο όταν λύνουμε κάποιο σύστημα $Ax = b$ γιατί αντιστοιχούν σε περιττές εξισώσεις (αλλά ας τις κρατάμε καθώς κάνουμε απαλοιφή).

Διευκρινίσεις.

⋆ Όταν έχουμε έναν (ενδεχομένως επαυξημένο) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και κάνουμε απαλοιφή Gauss για να πάμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

- Αν μια γραμμή βγει όλη μηδέν, *καλύτερα* να μην την πετάμε, αλλά να την βάζουμε τελευταία, για αποφυγή λαθών. Το τι σκάλα δμιουργείται (που είναι οι οδηγοί) το κοιτάμε μόνο στις *μη μηδενικές* γραμμές.
- Έτσι αν ο αρχικός πίνακας έχει 5 γραμμές, και ο τελικός θα έχει 5 γραμμές, ενδεχομένως με κάποιες μηδενικές.
- Τις μηδενικές γραμμές μπορούμε να τις αγνοήσουμε μόνο όταν λύνουμε κάποιο σύστημα $Ax = b$ γιατί αντιστοιχούν σε περιττές εξισώσεις (αλλά ας τις κρατάμε καθώς κάνουμε απαλοιφή).
- Ο πίνακας A είναι ο αρχικός, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του **δεν** είναι ο πίνακας A. Απλά η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του είναι γραμμοϊσοδύναμη με τον αρχικό πίνακα.

Διευκρινίσεις.

⋆ Όταν έχουμε έναν (ενδεχομένως επαυξημένο) πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και κάνουμε απαλοιφή Gauss για να πάμε στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή:

- Αν μια γραμμή βγει όλη μηδέν, *καλύτερα* να μην την πετάμε, αλλά να την βάζουμε τελευταία, για αποφυγή λαθών. Το τι σκάλα δημιουργείται (που είναι οι οδηγοί) το κοιτάμε μόνο στις *μη μηδενικές* γραμμές.
- Έτσι αν ο αρχικός πίνακας έχει 5 γραμμές, και ο τελικός θα έχει 5 γραμμές, ενδεχομένως με κάποιες μηδενικές.
- Τις μηδενικές γραμμές μπορούμε να τις αγνοήσουμε μόνο όταν λύνουμε κάποιο σύστημα $Ax = b$ γιατί αντιστοιχούν σε περιττές εξισώσεις (αλλά ας τις κρατάμε καθώς κάνουμε απαλοιφή).
- Ο πίνακας A είναι ο αρχικός, η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του **δεν** είναι ο πίνακας A. Απλά η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του είναι γραμμοϊσοδύναμη με τον αρχικό πίνακα.

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\texttt{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και έχουμε τρεις γραμμές και 2 οδηγούς, άρα **δεν** είναι επί στον $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και έχουμε τρεις γραμμές και 2 οδηγούς, άρα **δεν** είναι επί στον $\mathbb{R}^3$.

Αν στη διαδικασία πετάγαμε την μηδενική γραμμή μπορεί να μπερδευόμασταν ότι υπάρχουν 2 οδηγοί και 2 γραμμές, άρα θα λέγαμε ότι είναι επί – λάθος!

Κι άλλες διευκρινίσεις σε άλγεβρα πινάκων.

⋆ Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε

Κι άλλες διευκρινίσεις σε άλγεβρα πινάκων.

⋆ Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε

- $A^2 = I$ **δεν** σημαίνει ότι $A = I$ ή $A = -I$.

Κι άλλες διευκρινίσεις σε άλγεβρα πινάκων.

⋆ Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε

- $A^2 = I$ **δεν** σημαίνει ότι $A = I$ ή $A = -I$.Για Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κι άλλες διευκρινίσεις σε άλγεβρα πινάκων.

⋆ Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε

- $A^2 = I$ **δεν** σημαίνει ότι $A = I$ ή $A = -I$.Για Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $A^2 = I$ σημαίνει ωστόσο ότι $A^{-1} = A$ λόγω της σχέσης $A \cdot A = I$.

Κι άλλες διευκρινίσεις σε άλγεβρα πινάκων.

⋆ Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε

- $A^2 = I$ **δεν** σημαίνει ότι $A = I$ ή $A = -I$.Για Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $A^2 = I$ σημαίνει ωστόσο ότι $A^{-1} = A$ λόγω της σχέσης $A \cdot A = I$.
- $A^2 = 0$ **δεν** σημαίνει ότι $A = 0$.

Κι άλλες διευκρινίσεις σε άλγεβρα πινάκων.

⋆ Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε

- $A^2 = I$ **δεν** σημαίνει ότι $A = I$ ή $A = -I$.Για Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $A^2 = I$ σημαίνει ωστόσο ότι $A^{-1} = A$ λόγω της σχέσης $A \cdot A = I$.
- $A^2 = 0$ **δεν** σημαίνει ότι $A = 0$. Για παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Κι άλλες διευκρινίσεις σε άλγεβρα πινάκων.

⋆ Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε

- $A^2 = I$ **δεν** σημαίνει ότι $A = I$ ή $A = -I$.Για Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $A^2 = I$ σημαίνει ωστόσο ότι $A^{-1} = A$ λόγω της σχέσης $A \cdot A = I$.
- $A^2 = 0$ **δεν** σημαίνει ότι $A = 0$. Για παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Κάτι που όντως ισχύει (αλλά δεν χρειάζεται να θυμάστε): $AA^T = 0 \Rightarrow A = 0$

Κι άλλες διευκρινίσεις σε άλγεβρα πινάκων.

⋆ Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε

- $A^2 = I$ **δεν** σημαίνει ότι $A = I$ ή $A = -I$.Για Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $A^2 = I$ σημαίνει ωστόσο ότι $A^{-1} = A$ λόγω της σχέσης $A \cdot A = I$.
- $A^2 = 0$ **δεν** σημαίνει ότι $A = 0$. Για παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Κάτι που όντως ισχύει (αλλά δεν χρειάζεται να θυμάστε): $AA^T = 0 \Rightarrow A = 0$ και $A^TA = 0 \Rightarrow A = 0$.

Ορίζουσες.

Υπενθυμίζουμε ότι για να βρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν επί της ουσίας 2 τρόποι:

Ορίζουσες.

Υπενθυμίζουμε ότι για να βρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν επί της ουσίας 2 τρόποι:

1. Να διαλέξουμε την *αγαπημένη* μας γραμμή ή στήλη και να αναπτύξουμε ως προς αυτήν.

Ορίζουσες.

Υπενθυμίζουμε ότι για να βρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν επί της ουσίας 2 τρόποι:

1. Να διαλέξουμε την *αγαπημένη* μας γραμμή ή στήλη και να αναπτύξουμε ως προς αυτήν.
2. Να κάνουμε **γραμμοπράξεις** στον πίνακα A ώστε να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή

Ορίζουσες.

Υπενθυμίζουμε ότι για να βρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν επί της ουσίας 2 τρόποι:

1. Να διαλέξουμε την *αγαπημένη* μας γραμμή ή στήλη και να αναπτύξουμε ως προς αυτήν.
2. Να κάνουμε **γραμμοπράξεις** στον πίνακα A ώστε να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή, η οποία στην προκειμένη θα είναι μορφή άνω τριγωνικού πίνακα:

Υπενθυμίζουμε ότι για να βρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν επί της ουσίας 2 τρόποι:

1. Να διαλέξουμε την *αγαπημένη* μας γραμμή ή στήλη και να αναπτύξουμε ως προς αυτήν.
2. Να κάνουμε **γραμμοπράξεις** στον πίνακα A ώστε να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή, η οποία στην προκειμένη θα είναι μορφή άνω τριγωνικού πίνακα:αν υπάρχει ένα μηδενικό στη διαγώνιο (ισοδύναμα βγει μια μηδενική γραμμή) τότε $det(A) = 0$,

Υπενθυμίζουμε ότι για να βρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν επί της ουσίας 2 τρόποι:

1. Να διαλέξουμε την *αγαπημένη* μας γραμμή ή στήλη και να αναπτύξουμε ως προς αυτήν.
2. Να κάνουμε **γραμμοπράξεις** στον πίνακα A ώστε να τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή, η οποία στην προκειμένη θα είναι μορφή άνω τριγωνικού πίνακα:αν υπάρχει ένα μηδενικό στη διαγώνιο (ισοδύναμα βγει μια μηδενική γραμμή) τότε $det(A) = 0$,αλλιώς είναι το γινόμενο των στοιχείων στη διαγώνιο.

Ορίζουσες και Συμπληρωματικός Πίνακας

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε για οποιοδήποτε $i \in [n]$ ισχύει

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

όπου $C_{jk} = (-1)^{j+k}det(A_{jk})$ και

Ορίζουσες και Συμπληρωματικός Πίνακας

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε για οποιοδήποτε $i \in [n]$ ισχύει

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

όπου $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$ και
ο πίνακας A_{jk} είναι ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας
που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε για οποιοδήποτε $i \in [n]$ ισχύει

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

όπου $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$ και
ο πίνακας A_{jk} είναι ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας
που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.

$\star$ Σημαντική Ιδιότητα από την προηγούμενη διάλεξη: Ένας πίνακας του οποίου οι γραμμές (ή οι στήλες) είναι γραμμικώς εξαρτημένες έχει ορίζουσα ίση με 0.

Κρίσιμη ερώτηση.

Με τι ισούται το

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in};$$

Κρίσιμη ερώτηση.

Με τι ισούται το

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in};$$

Έστω ο πίνακας B ο οποίος προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-οστή γραμμή με τη j-οστή του γραμμή.

Κρίσιμη ερώτηση.

Με τι ισούται το

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in};$$

Έστω ο πίνακας B ο οποίος προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-οστή γραμμή με τη j-οστή του γραμμή.

Τότε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = det(B),$$

Κρίσιμη ερώτηση.

Με τι ισούται το

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in};$$

Έστω ο πίνακας B ο οποίος προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-οστή γραμμή με τη j-οστή του γραμμή.

Τότε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = det(B),$$

διότι είναι το ανάπτυγμα ως προς την i-οστή του γραμμή.

Κρίσιμη ερώτηση.

Με τι ισούται το

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in};$$

Έστω ο πίνακας B ο οποίος προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-οστή γραμμή με τη j-οστή του γραμμή.

Τότε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = det(B),$$

διότι είναι το ανάπτυγμα ως προς την i-οστή του γραμμή.

- Αν $j = i$ τότε $B = A$ και άρα $det(B) = det(A)$.

Κρίσιμη ερώτηση.

Με τι ισούται το

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in};$$

Έστω ο πίνακας B ο οποίος προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-οστή γραμμή με τη j-οστή του γραμμή.

Τότε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = det(B),$$

διότι είναι το ανάπτυγμα ως προς την i-οστή του γραμμή.

- Αν $j = i$ τότε $B = A$ και άρα $det(B) = det(A)$.
- Αν $j \neq i$ τότε ο B έχει δύο ίδιες γραμμές,

Κρίσιμη ερώτηση.

Με τι ισούται το

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in};$$

Έστω ο πίνακας B ο οποίος προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-οστή γραμμή με τη j-οστή του γραμμή.

Τότε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = det(B),$$

διότι είναι το ανάπτυγμα ως προς την i-οστή του γραμμή.

- Αν $j = i$ τότε $B = A$ και άρα $det(B) = det(A)$.
- Αν $j \neq i$ τότε ο B έχει δύο ίδιες γραμμές, την j-οστή και την i-οστή,

Κρίσιμη ερώτηση.

Με τι ισούται το

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in};$$

Έστω ο πίνακας B ο οποίος προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i-οστή γραμμή με τη j-οστή του γραμμή.

Τότε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = det(B),$$

διότι είναι το ανάπτυγμα ως προς την i-οστή του γραμμή.

- Αν $j = i$ τότε $B = A$ και άρα $det(B) = det(A)$.
- Αν $j \neq i$ τότε ο B έχει δύο ίδιες γραμμές, την j-οστή και την i-οστή, άρα $det(B) = 0$.

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

⋆ Για $j \neq i$ έχουμε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = 0$$

και για $j = i$ έχουμε

$$a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = det(A).$$

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

⋆ Για $j \neq i$ έχουμε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = 0$$

και για $j = i$ έχουμε

$$a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = det(A).$$

Ας ορίσουμε ως a_i τις **γραμμές** του A,

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

⋆ Για $j \neq i$ έχουμε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = 0$$

και για $j = i$ έχουμε

$$a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = det(A).$$

Ας ορίσουμε ως a_i τις **γραμμές** του A, και τα διανύσματα

$$C_i := \begin{bmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \\ \ldots \\ C_{in} \end{bmatrix}$$

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

⋆ Για $j \neq i$ έχουμε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = 0$$

και για $j = i$ έχουμε

$$a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = det(A).$$

Ας ορίσουμε ως a_i τις **γραμμές** του A, και τα διανύσματα

$$C_i := \begin{bmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \\ \ldots \\ C_{in} \end{bmatrix}$$

Τότε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ και

Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

⋆ Για $j \neq i$ έχουμε

$$a_{j1}C_{i1} + a_{j2}C_{i2} + \ldots + a_{jn}C_{in} = 0$$

και για $j = i$ έχουμε

$$a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} = det(A).$$

Ας ορίσουμε ως a_i τις **γραμμές** του A, και τα διανύσματα

$$C_i := \begin{bmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \\ \ldots \\ C_{in} \end{bmatrix}$$

Τότε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ και $\langle a_j, C_j \rangle = det(A)$.

Μας θυμίζει κάτι αυτό;

Έχουμε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ και

Μας θυμίζει κάτι αυτό;

Έχουμε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ και $\langle a_j, C_j \rangle = det(A)$.

Μας θυμίζει κάτι αυτό;

Έχουμε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ **και** $\langle a_j, C_j \rangle = det(A)$.

Δηλαδή δύο συλλογές διανυσμάτων έτσι ώστε κάθε διάνυσμα της πρώτης να είναι **κάθετο** σε όλα της δεύτερης εκτός από *ακριβώς* ένα.

Μας θυμίζει κάτι αυτό;

Έχουμε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ **και** $\langle a_j, C_j \rangle = det(A)$.

Δηλαδή δύο συλλογές διανυσμάτων έτσι ώστε κάθε διάνυσμα της πρώτης να είναι **κάθετο** σε όλα της δεύτερης εκτός από *ακριβώς* ένα.

Ας το δούμε σαν

$$\langle a_j, \frac{1}{det(A)} C_i \rangle = 0, j \neq i \qquad \langle a_j, \frac{1}{det(A)} C_j \rangle = 1.$$

Μας θυμίζει κάτι αυτό;

Έχουμε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ και $\langle a_j, C_j \rangle = det(A)$.

Δηλαδή δύο συλλογές διανυσμάτων έτσι ώστε κάθε διάνυσμα της πρώτης να είναι **κάθετο** σε όλα της δεύτερης εκτός από *ακριβώς* ένα.

Ας το δούμε σαν

$$\langle a_j, \frac{1}{det(A)} C_i \rangle = 0, j \neq i \qquad \langle a_j, \frac{1}{det(A)} C_j \rangle = 1.$$

Τα a_j είναι οι **γραμμές** του A,

Μας θυμίζει κάτι αυτό;

Έχουμε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ και $\langle a_j, C_j \rangle = det(A)$.

Δηλαδή δύο συλλογές διανυσμάτων έτσι ώστε κάθε διάνυσμα της πρώτης να είναι **κάθετο** σε όλα της δεύτερης εκτός από *ακριβώς* ένα.

Ας το δούμε σαν

$$\langle a_j, \frac{1}{det(A)} C_i \rangle = 0, j \neq i \qquad \langle a_j, \frac{1}{det(A)} C_j \rangle = 1.$$

Τα a_j είναι οι **γραμμές** του A, οπότε αν πάρω τον πίνακα C που έχει στήλες τα $\frac{1}{det(A)} C_i$ θα ισχύει ότι

Μας θυμίζει κάτι αυτό;

Έχουμε $\langle a_j, C_i \rangle = 0, j \neq i$ και $\langle a_j, C_j \rangle = det(A)$.

Δηλαδή δύο συλλογές διανυσμάτων έτσι ώστε κάθε διάνυσμα της πρώτης να είναι **κάθετο** σε όλα της δεύτερης εκτός από *ακριβώς* ένα.

Ας το δούμε σαν

$$\langle a_j, \frac{1}{det(A)} C_i \rangle = 0, j \neq i \qquad \langle a_j, \frac{1}{det(A)} C_j \rangle = 1.$$

Τα a_j είναι οι **γραμμές** του A, οπότε αν πάρω τον πίνακα C που έχει στήλες τα $\frac{1}{det(A)} C_i$ θα ισχύει ότι

$$AC = I,$$

δηλαδή ο C είναι ο αντίστροφος του A!

Ένα άλλος τρόπος να βρούμε τον αντίστροφο.

Έστω ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ένα άλλος τρόπος να βρούμε τον αντίστροφο.

Έστω ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας C^T λέγεται **συμπληρωματικός**, συμβολίζεται ως $adj(A)$ και ικανοποιεί

$$A \cdot adj(A) = det(A)I.$$

Ένα άλλος τρόπος να βρούμε τον αντίστροφο.

Έστω ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας C^T λέγεται **συμπληρωματικός**, συμβολίζεται ως $adj(A)$ και ικανοποιεί

$$A \cdot adj(A) = det(A) I.$$

Αν $det(A) \neq 0$ τότε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$.

Αντιστρέψιμος πίνακας και ορίζουσες.

Άρα έχουμε δύο τρόπους να βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Ο πρώτος είναι να φτιάξουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και να φέρουμε τον αριστερά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Αντιστρέψιμος πίνακας και ορίζουσες.

Άρα έχουμε δύο τρόπους να βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Ο πρώτος είναι να φτιάξουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και να φέρουμε τον αριστερά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Αν ο αριστερά γίνει ο μοναδιαίος, τότε ο δεξιά είναι ο A^{-1}- αλλιώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Αντιστρέψιμος πίνακας και ορίζουσες.

Άρα έχουμε δύο τρόπους να βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Ο πρώτος είναι να φτιάξουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και να φέρουμε τον αριστερά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Αν ο αριστερά γίνει ο μοναδιαίος, τότε ο δεξιά είναι ο A^{-1}- αλλιώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. Ο άλλος τρόπος είναι να υπολογίσουμε, εφόσον $det(A) \neq 0$, τον συμπληρωματικό πίνακα $adj(A)$ για τον οποίο ισχύει

$$adj(A)_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ji}.$$

Αντιστρέψιμος πίνακας και ορίζουσες.

Άρα έχουμε δύο τρόπους να βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Ο πρώτος είναι να φτιάξουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και να φέρουμε τον αριστερά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Αν ο αριστερά γίνει ο μοναδιαίος, τότε ο δεξιά είναι ο A^{-1}- αλλιώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. Ο άλλος τρόπος είναι να υπολογίσουμε, εφόσον $det(A) \neq 0$, τον συμπληρωματικό πίνακα $adj(A)$ για τον οποίο ισχύει

$$adj(A)_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ji}.$$

Τότε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$.

Αντιστρέψιμος πίνακας και ορίζουσες.

Άρα έχουμε δύο τρόπους να βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Ο πρώτος είναι να φτιάξουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και να φέρουμε τον αριστερά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Αν ο αριστερά γίνει ο μοναδιαίος, τότε ο δεξιά είναι ο A^{-1}- αλλιώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. Ο άλλος τρόπος είναι να υπολογίσουμε, εφόσον $det(A) \neq 0$, τον συμπληρωματικό πίνακα $adj(A)$ για τον οποίο ισχύει

$$adj(A)_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ji}.$$

   Τότε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$.

Ο δεύτερος τρόπος απαιτεί να υπολογίσουμε $n^2 + 1$ ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$ πινάκων

Αντιστρέψιμος πίνακας και ορίζουσες.

Άρα έχουμε δύο τρόπους να βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Ο πρώτος είναι να φτιάξουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και να φέρουμε τον αριστερά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Αν ο αριστερά γίνει ο μοναδιαίος, τότε ο δεξιά είναι ο A^{-1}- αλλιώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. Ο άλλος τρόπος είναι να υπολογίσουμε, εφόσον $det(A) \neq 0$, τον συμπληρωματικό πίνακα $adj(A)$ για τον οποίο ισχύει

$$adj(A)_{ij} = (-1)^{i+j}C_{ji}.$$

   Τότε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}adj(A)$.

Ο δεύτερος τρόπος απαιτεί να υπολογίσουμε $n^2 + 1$ ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$ πινάκων και είναι υπολογιστικά πολύ ακριβότερος.

Αντιστρέψιμος πίνακας και ορίζουσες.

Άρα έχουμε δύο τρόπους να βρίσκουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Ο πρώτος είναι να φτιάξουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και να φέρουμε τον αριστερά σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Αν ο αριστερά γίνει ο μοναδιαίος, τότε ο δεξιά είναι ο A^{-1}- αλλιώς ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.
2. Ο άλλος τρόπος είναι να υπολογίσουμε, εφόσον $det(A) \neq 0$, τον συμπληρωματικό πίνακα $adj(A)$ για τον οποίο ισχύει

$$adj(A)_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ji}.$$

   Τότε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$.

Ο δεύτερος τρόπος απαιτεί να υπολογίσουμε $n^2 + 1$ ορίζουσες $(n-1) \times (n-1)$ πινάκων και είναι υπολογιστικά πολύ ακριβότερος. Έτσι χρησιμεύει συνήθως για να αποδείξουμε θεωρήματα και όχι για να υπολογίσουμε τον A^{-1}.

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow$

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
⋆ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. Όμως $det(A), det(A^{-1})$ είναι *ακέραιοι* αριθμοί (γιατί ;)

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. Όμως $det(A), det(A^{-1})$ είναι *ακέραιοι* αριθμοί (γιατί ;) και άρα είτε και οι δύο είναι 1 είτε και οι δύο -1.

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. Όμως $det(A), det(A^{-1})$ είναι *ακέραιοι* αριθμοί (γιατί ;) και άρα είτε και οι δύο είναι 1 είτε και οι δύο -1.
$\star$ $det(A) = \pm 1 \Rightarrow$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια:

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. Όμως $det(A), det(A^{-1})$ είναι *ακέραιοι* αριθμοί (γιατί ;) και άρα είτε και οι δύο είναι 1 είτε και οι δύο -1.
$\star$ $det(A) = \pm 1 \Rightarrow$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια:
Έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) =$

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. Όμως $det(A), det(A^{-1})$ είναι *ακέραιοι* αριθμοί (γιατί ;) και άρα είτε και οι δύο είναι 1 είτε και οι δύο -1.
$\star$ $det(A) = \pm 1 \Rightarrow$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια:
Έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \pm\, adj(A)$,

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. Όμως $det(A), det(A^{-1})$ είναι *ακέραιοι* αριθμοί (γιατί ;) και άρα είτε και οι δύο είναι 1 είτε και οι δύο -1.
$\star$ $det(A) = \pm 1 \Rightarrow$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια:
Έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \pm\, adj(A)$,και ο $adj(A)$ έχει ως στοιχεία τις ελλάσονες ορίζουσες του A.

Εφαρμογή του συμπληρωματικού πίνακα.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. Όμως $det(A), det(A^{-1})$ είναι *ακέραιοι* αριθμοί (γιατί ;) και άρα είτε και οι δύο είναι 1 είτε και οι δύο -1.
$\star$ $det(A) = \pm 1 \Rightarrow$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια:
Έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \pm\, adj(A)$,και ο $adj(A)$ έχει ως στοιχεία τις ελλάσονες ορίζουσες του A. Κάθε τέτοια ορίζουσα είναι ένας ακέραιος αριθμός, διότι τα στοιχεία του A είναι ακέραια.

Ισχυρισμός: Έστω ένας αντιστρέψιμος πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε ο A^{-1} έχει και αυτός όλα του τα στοιχεία ακεραίους αν και μόνο αν $det(A) = \pm 1$.

Απόδειξη:
$\star$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια $\Rightarrow det(A) = \pm 1$:
$AA^{-1} = I \Rightarrow det(A) \cdot det(A^{-1}) = 1$. Όμως $det(A), det(A^{-1})$ είναι *ακέραιοι* αριθμοί (γιατί ;) και άρα είτε και οι δύο είναι 1 είτε και οι δύο -1.
$\star$ $det(A) = \pm 1 \Rightarrow$ όλα τα στοιχεία του A^{-1} είναι ακέραια:
Έχουμε $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \pm\, adj(A)$,και ο $adj(A)$ έχει ως στοιχεία τις ελλάσονες ορίζουσες του A. Κάθε τέτοια ορίζουσα είναι ένας ακέραιος αριθμός, διότι τα στοιχεία του A είναι ακέραια. Άρα ο A^{-1} έχει αποκλειστικά ακέραια στοιχεία.

Κανόνας του Cramer.

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Κανόνας του Cramer.

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος λύση του συστήματος είναι $x = A^{-1}b$, άρα και εφόσον $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$ έχουμε

Κανόνας του Cramer.

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος λύση του συστήματος είναι $x = A^{-1}b$, άρα και εφόσον $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$ έχουμε

$$x = \frac{1}{det(A)} adj(A) b =$$

Κανόνας του Cramer.

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος λύση του συστήματος είναι $x = A^{-1}b$, άρα και εφόσον $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}adj(A)$ έχουμε

$$x = \frac{1}{det(A)}adj(A)b = \frac{1}{det(A)}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Κανόνας του Cramer.

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος λύση του συστήματος είναι $x = A^{-1}b$, άρα και εφόσον $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$ έχουμε

$$x = \frac{1}{det(A)} adj(A)b = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Τι είναι το $C_{11}b_1 + C_{21}b_1 + \ldots + C_{n1}b_n$;

Κανόνας του Cramer.

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος λύση του συστήματος είναι $x = A^{-1}b$, άρα και εφόσον $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$ έχουμε

$$x = \frac{1}{det(A)} adj(A)b = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Τι είναι το $C_{11}b_1 + C_{21}b_1 + \ldots + C_{n1}b_n$;

Είναι η ορίζουσα του πίνακα A όπου η πρώτη **στήλη** έχει αντικατασταθεί με το διάνυσμα b.

Κανόνας του Cramer.

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος λύση του συστήματος είναι $x = A^{-1}b$, άρα και εφόσον $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}adj(A)$ έχουμε

$$x = \frac{1}{det(A)}adj(A)b = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Τι είναι το $C_{11}b_1 + C_{21}b_1 + \ldots + C_{n1}b_n$;

Είναι η ορίζουσα του πίνακα A όπου η πρώτη **στήλη** έχει αντικατασταθεί με το διάνυσμα b.

Γενικά το $C_{1i}b_1 + C_{2i}b_1 + \ldots + C_{ni}b_n$ ισούται με την ορίζουσα του πίνακα A όπου η i-οστή **στήλη** έχει αντικατασταθεί με το διάνυσμα b.

Κανόνας του Cramer

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Κανόνας του Cramer

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.Αν $det(A) \neq 0$ τότε μπορούμε να βρούμε το x (το οποίο είναι μοναδικό) ως

Κανόνας του Cramer

Έστω ένα σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.Αν $det(A) \neq 0$ τότε μπορούμε να βρούμε το x (το οποίο είναι μοναδικό) ως

$$x = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} det(A_1) \\ det(A_2) \\ \dots \\ det(A_n) \end{bmatrix}$$

όπου με A_i συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν η i-οστή στήλη αντικατασταθεί με το διάνυσμα b.

Ένα παράδειγμα.

Να εφαρμοστεί ο κανόνας του Cramer στο σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2022 \\ 2023 \\ 2024 \end{bmatrix}$$

Ένα παράδειγμα.

Να εφαρμοστεί ο κανόνας του Cramer στο σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2022 \\ 2023 \\ 2024 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις $det(A_1), det(A_2), det(A_3)$ ως

Ένα παράδειγμα.

Να εφαρμοστεί ο κανόνας του Cramer στο σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2022 \\ 2023 \\ 2024 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις $det(A_1), det(A_2), det(A_3)$ ως

$$det\left(\begin{bmatrix} \color{red}{2022} & 2 & 3 \\ \color{red}{2023} & 6 & 5 \\ \color{red}{2024} & 2 & -1 \end{bmatrix} \right),$$

Να εφαρμοστεί ο κανόνας του Cramer στο σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2022 \\ 2023 \\ 2024 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις $det(A_1), det(A_2), det(A_3)$ ως

$$det\left(\begin{bmatrix} 2022 & 2 & 3 \\ 2023 & 6 & 5 \\ 2024 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right), det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2022 & 3 \\ -1 & 2023 & 5 \\ 0 & 2024 & -1 \end{bmatrix}\right),$$

Ένα παράδειγμα.

Να εφαρμοστεί ο κανόνας του Cramer στο σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2022 \\ 2023 \\ 2024 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις $det(A_1), det(A_2), det(A_3)$ ως

$$det\left(\begin{bmatrix} 2022 & 2 & 3 \\ 2023 & 6 & 5 \\ 2024 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right), det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2022 & 3 \\ -1 & 2023 & 5 \\ 0 & 2024 & -1 \end{bmatrix}\right), det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2022 \\ -1 & 6 & 2023 \\ 0 & 2 & 2024 \end{bmatrix}\right)$$

Ένα παράδειγμα.

Να εφαρμοστεί ο κανόνας του Cramer στο σύστημα

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2022 \\ 2023 \\ 2024 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις $det(A_1), det(A_2), det(A_3)$ ως

$$det\left(\begin{bmatrix} 2022 & 2 & 3 \\ 2023 & 6 & 5 \\ 2024 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right), det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2022 & 3 \\ -1 & 2023 & 5 \\ 0 & 2024 & -1 \end{bmatrix}\right), det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2022 \\ -1 & 6 & 2023 \\ 0 & 2 & 2024 \end{bmatrix}\right)$$

και έχουμε $x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, x_3 = \frac{det(A_1)}{det(A)}$.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Ότι υπάρχει ένας κλειστός τύπος για τον αντίστροφο του A με βάση τις ελάσσονες ορίζουσες του A.
- Τον κανόνα του Cramer.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!