Γραμμική Άλγεβρα

Ένατη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο A είναι ο αντίστροφος του A.

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο A είναι ο αντίστροφος του A.
- Τα ίδια ισχύουν για τον A^{-1}.

Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο A^{-1} υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο A είναι ο αντίστροφος του A.
- Τα ίδια ισχύουν για τον A^{-1}.

Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

Έχουμε $(A+I)(B+I)=I \Rightarrow AB+A+B=I \quad (1)$.

Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I) = I$ τότε και $AB = BA$.

Έχουμε $(A+I)(B+I) = I \Rightarrow AB + A + B = I \quad (1)$.

Επίσης, $B+I$ αντίστροφος του $A+I$ άρα

Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

Έχουμε $(A+I)(B+I)=I \Rightarrow AB+A+B=I \quad (1)$.

Επίσης, $B+I$ αντίστροφος του $A+I$ άρα

$$(B+I)(A+I)=I \Rightarrow BA+B+A=I \qquad (2)$$

Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

Έχουμε $(A+I)(B+I)=I \Rightarrow AB+A+B=I \quad (1)$.

Επίσης, $B+I$ αντίστροφος του $A+I$ άρα

$$(B+I)(A+I)=I \Rightarrow BA+B+A=I \qquad (2)$$

Αφαιρώντας (2) από (1) παίρνουμε

$$AB-BA=0 \Rightarrow AB=BA$$

Ορίζουσα.

Έστω το σύστημα $Ax = b$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Ορίζουσα.

Έστω το σύστημα $Ax = b$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Κάνοντας απαλοιφή Gauss μπορούμε να βρούμε ότι

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{\color{red}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{\color{red}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}$$

Ορίζουσα.

Έστω το σύστημα $Ax = b$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Κάνοντας απαλοιφή Gauss μπορούμε να βρούμε ότι

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

όταν $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Ορίζουσα.

Έστω το σύστημα $Ax = b$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Κάνοντας απαλοιφή Gauss μπορούμε να βρούμε ότι

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

όταν $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

⋆ Ορίζουμε την ορίζουσα το A ως $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας.

Η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ισούται σε **απόλυτη τιμή** με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι στήλες του πίνακα,

Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας.

Η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ισούται σε **απόλυτη τιμή** με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι στήλες του πίνακα, δηλαδή τα

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας.

Η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ισούται σε **απόλυτη τιμή** με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι στήλες του πίνακα, δηλαδή τα

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

αλλά και με το εμδαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι γραμμές του πίνακα!

Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας.

Η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ισούται σε **απόλυτη τιμή** με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι στήλες του πίνακα, δηλαδή τα

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

αλλά και με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι γραμμές του πίνακα!

Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα 2×2 σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα 2×2 σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών A **δεν** είναι αντιστρέψιμος

Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα 2×2 σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών A **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα 2×2 σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών A **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$$\Longleftrightarrow$$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα 2×2 σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$\Longleftrightarrow$

πίνακας συντελεστών A **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$\Longleftrightarrow$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$\Longleftrightarrow$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

$\Longleftrightarrow$

Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα 2×2 σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών A **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$$\Longleftrightarrow$$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

$$\Longleftrightarrow$$

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι 0

Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα 2×2 σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών A **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$$\Longleftrightarrow$$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

$$\Longleftrightarrow$$

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι 0

$$\Longleftrightarrow$$

$$det(A) = 0.$$

Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα 2×2 σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών A **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$$\Longleftrightarrow$$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

$$\Longleftrightarrow$$

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι 0

$$\Longleftrightarrow$$

$$det(A) = 0.$$

Ορίζοντας την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορίζουμε ως A_{jk} τον 2×2 πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.

Ορίζοντας την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορίζουμε ως A_{jk} τον 2×2 πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.

Ποιος είναι ο $A_{3,1}$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$;

Ορίζοντας την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ορίζουμε ως A_{jk} τον 2×2 πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.

Ποιος είναι ο $A_{3,1}$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$; $\Rightarrow A_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ορίζοντας την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορίζουμε ως A_{jk} τον 2×2 πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.

$$\text{Ποιος είναι ο } A_{3,1} \text{ για } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}; \Rightarrow A_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ποιος είναι ο } A_{2,2} \text{ για } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix};$$

Ορίζοντας την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορίζουμε ως A_{jk} τον 2×2 πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη.

$$\text{Ποιος είναι ο } A_{3,1} \text{ για } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}; \Rightarrow A_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ποιος είναι ο } A_{2,2} \text{ για } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}; \Rightarrow A_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Ορισμός 3×3 ορίζουσας.

Για έναν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η ορίζουσα του A ορίζεται αναδρομικά ως

Ορισμός 3×3 ορίζουσας.

Για έναν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η ορίζουσα του A ορίζεται αναδρομικά ως

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

Ορισμός 3×3 ορίζουσας.

Για έναν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η ορίζουσα του A ορίζεται αναδρομικά ως

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

Προσοχή ότι οι $det(A_{11}), det(A_{12}), det(A_{13})$ είναι ορίζουσες 2×2 πινάκων, τις οποίες ξέρω να υπολογίζω!

Ορισμός 3×3 ορίζουσας.

Για έναν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η ορίζουσα του A ορίζεται αναδρομικά ως

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

Προσοχή ότι οι $det(A_{11}), det(A_{12}), det(A_{13})$ είναι ορίζουσες 2×2 πινάκων, τις οποίες ξέρω να υπολογίζω!

Η απόλυτη τιμή της ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ τον οποίο δημιουργούν τα διανύσματα που είναι στήλες του A.

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star \; det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star \; det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star\ det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

$$\star\ det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star\ det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

$$\star\ det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 7$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star\ det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

$$\star\ det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 7$$

$$\star\ det(A_{13}) = det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star\ det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

$$\star\ det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 7$$

$$\star\ det(A_{13}) = det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Συνέχεια Παραδείγματος.

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Άρα $det(A) = 4 \cdot 18 - (-2) \cdot 7 + 3 \cdot (-3) = 77$

Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

Ορισμός: Η ελλάσσονα ορίζουσα που αντιστοίχει στο στοιχείο (i, j) είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

Ορισμός: Η ελλάσσονα ορίζουσα που αντιστοίχει στο στοιχείο (i, j) είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για **όποιο** i από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

Ορισμός: Η ελλάσσονα ορίζουσα που αντιστοίχει στο στοιχείο (i, j) είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για **όποιο** i από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1} det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2} det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3} det(A_{i3})$$

Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

Ορισμός: Η ελλάσσονα ορίζουσα που αντιστοίχει στο στοιχείο (i,j) είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για **όποιο** i από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1}det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3}det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή ($i = 1$):

Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

Ορισμός: Η ελλάσσονα ορίζουσα που αντιστοίχει στο στοιχείο (i, j) είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για **όποιο** i από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1}det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3}det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή $(i = 1)$:

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

Ορισμός: Η ελλάσσονα ορίζουσα που αντιστοίχει στο στοιχείο (i, j) είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για **όποιο** i από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1} det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2} det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3} det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή $(i = 1)$:

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

2. Ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή $(i = 2)$:

Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

Ορισμός: Η ελλάσσονα ορίζουσα που αντιστοίχει στο στοιχείο (i, j) είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για **όποιο** i από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1} det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2} det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3} det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή $(i = 1)$:

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

2. Ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή $(i = 2)$:

$$det(A) = -a_{21} \cdot det(A_{21}) + a_{22} \cdot det(A_{22}) - a_{23} \cdot det(A_{23}).$$

Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

Ορισμός: Η ελλάσσονα ορίζουσα που αντιστοίχει στο στοιχείο (i,j) είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για **όποιο** i από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1}det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3}det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή ($i = 1$):

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

2. Ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή ($i = 2$):

$$det(A) = -a_{21} \cdot det(A_{21}) + a_{22} \cdot det(A_{22}) - a_{23} \cdot det(A_{23}).$$

Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή. Έχουμε

$$\star \ det(A_{31}) = det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -19$$

Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή. Έχουμε

$$\star\ det(A_{31}) = det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -19$$

$$\star\ det(A_{33}) = det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή. Έχουμε

$$\star\ det(A_{31}) = det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -19$$

$$\star\ det(A_{33}) = det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

$$det(A) = {\color{red}1} \cdot (-1)^{3+1}(-19) + {\color{red}0} \cdot (-1)^{3+2} det(A_{32}) + 6 \cdot (-1)^{3+3} 16 =$$

Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή. Έχουμε

$$\star\ det(A_{31}) = det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -19$$

$$\star\ det(A_{33}) = det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

$$det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+1}(-19) + 0 \cdot (-1)^{3+2} det(A_{32}) + 6 \cdot (-1)^{3+3} 16 = 77$$

Αλλά μπορούμε να αναπτύξουμε και ως προς κάποια στήλη!

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για όποιο j από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{1j}(-1)^{j+1}det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{j+2}det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{j+3}det(A_{j3})$$

Αλλά μπορούμε να αναπτύξουμε και ως προς κάποια στήλη!

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για όποιο j από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{1j}(-1)^{j+1}det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{j+2}det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{j+3}det(A_{j3})$$

Με άλλα λόγια, μπορώ να πάρω τον ανάστροφο του A και να υπολογίσω την ορίζουσα του A^T αναπτύσσοντας ως προς κάποια γραμμή:

Αλλά μπορούμε να αναπτύξουμε και ως προς κάποια στήλη!

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για όποιο j από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{1j}(-1)^{j+1}det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{j+2}det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{j+3}det(A_{j3})$$

Με άλλα λόγια, μπορώ να πάρω τον ανάστροφο του A και να υπολογίσω την ορίζουσα του A^T αναπτύσσοντας ως προς κάποια γραμμή: ο A και ο A^T έχουν την ίδια ορίζουσα, $det(A) - det(A^T)$.

Αλλά μπορούμε να αναπτύξουμε και ως προς κάποια στήλη!

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα ισούται, για όποιο j από 1 ως 3 και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{1j}(-1)^{j+1}det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{j+2}det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{j+3}det(A_{j3})$$

Με άλλα λόγια, μπορώ να πάρω τον ανάστροφο του A και να υπολογίσω την ορίζουσα του A^T αναπτύσσοντας ως προς κάποια γραμμή: ο A και ο A^T έχουν την ίδια ορίζουσα, $det(A) - det(A^T)$.

Άρα έχουμε 6 τρόπους για να υπολογίσουμε το $det(A)$: 3 αναπτύγματα για τις γραμμές και 3 για τις στήλες. Όλα δίνουν τον ίδιο αριθμό!

Μοτίβο Προσήμων σε έναν 3×3 Πίνακα

Τα πρόσημα στο ανάπτυγμα της ορίζουσας σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη πάνε εναλλάξ.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Μοτίβο Προσήμων σε έναν 3×3 Πίνακα

Τα πρόσημα στο ανάπτυγμα της ορίζουσας σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη πάνε εναλλάξ.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Παραδείγματος χάρη, αναπτύσσοντας ως προς τη δεύτερη στήλη

$$det(A) = -a_{12} \cdot det(A_1 2) + a_{22} det(A_{22}) - a_{32} det(A_{32})$$

Ισοδυναμίες.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (και ισχύουν και για $n \times n$ πίνακες μόλις ορίσουμε την ορίζουσα τους).

Ισοδυναμίες.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (και ισχύουν και για $n \times n$ πίνακες μόλις ορίσουμε την ορίζουσα τους).

1. Το σύστημα $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση.
2. Ο A είναι αντιστρέψιμος.
3. $det(A) \neq 0$.

Ισοδυναμίες.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (και ισχύουν και για $n \times n$ πίνακες μόλις ορίσουμε την ορίζουσα τους).

1. Το σύστημα $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση.
2. Ο A είναι αντιστρέψιμος.
3. $det(A) \neq 0$.
4. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
5. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Ισοδυναμίες.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (και ισχύουν και για $n \times n$ πίνακες μόλις ορίσουμε την ορίζουσα τους).

1. Το σύστημα $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση.
2. Ο A είναι αντιστρέψιμος.
3. $det(A) \neq 0$.
4. Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
5. Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
6. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι τέλεια σκάλα.
7. Ο βαθμός (πλήθος βασικών μεταβλητών) του A είναι n.
8. Ο A δεν έχει καμία ελεύθερη μεταβλητή.

Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού 0 κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού 0 κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = f \cdot (-1)^{3+3} det(A_{33}) =$$

Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού 0 κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = {\color{red} f} \cdot (-1)^{3+3} det(A_{33}) = \; = f \cdot det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) =$$

Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού 0 κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = f\cdot(-1)^{3+3} det(A_{33}) = \; = f\cdot det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) = \; = f\cdot(ad - 0\cdot b) = a\cdot d\cdot f.$$

Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού 0 κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = {\color{red}f}\cdot(-1)^{3+3}det(A_{33}) = \; = f\cdot det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = \; = f\cdot(ad-0\cdot b) = a\cdot d\cdot f.$$

Άρα, απλά πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία στη διαγώνιο!

Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού 0 κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = {\color{red} f} \cdot (-1)^{3+3} det(A_{33}) = \; = f \cdot det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) = \; = f \cdot (ad - 0 \cdot b) = a \cdot d \cdot f.$$

Άρα, απλά πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία στη διαγώνιο! Όμοια και για κάτω τριγωνικούς.

Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν από τον A αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη. Τότε

Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν από τον A αφαιρέσουμε την j-οστή γραμμή και την k-οστή στήλη. Τότε

$$\begin{aligned} det(A) = \\ a_{i1}(-1)^{i+1}\cdot det(A_{i1})+ \\ a_{i2}(-1)^{i+2}\cdot det(A_{i2})+ \\ \ldots + \\ a_{in}(-1)^{i+n}\cdot det(A_{in}) \end{aligned}$$

Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$.

Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i-οστή γραμμή):

Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i-οστή γραμμή):

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά i-οστή στήλη):

$$det(A) = a_{1i} \cdot C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \ldots + a_{ni}C_{ni}$$

Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i-οστή γραμμή):

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά i-οστή στήλη):

Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i-οστή γραμμή):

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά i-οστή στήλη):

$$det(A) = a_{1i} \cdot C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \ldots + a_{ni}C_{ni}$$

Πίνακες με μηδενική γραμμή ή στήλη.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που έχει κάποια γραμμή ή κάποια στήλη όλη μηδενικά τι ορίζουσα έχει;

Πίνακες με μηδενική γραμμή ή στήλη.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που έχει κάποια γραμμή ή κάποια στήλη όλη μηδενικά τι ορίζουσα έχει;

$$det(A) = 0.$$

Πίνακες με μηδενική γραμμή ή στήλη.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που έχει κάποια γραμμή ή κάποια στήλη όλη μηδενικά τι ορίζουσα έχει;

$$det(A) = 0.$$

Αναπτύσσοντας ως προς την αντίστοιχη γραμμή (ή στήλη) που είναι όλη μηδενικά, έστω η i, παίρνουμε

Πίνακες με μηδενική γραμμή ή στήλη.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ που έχει κάποια γραμμή ή κάποια στήλη όλη μηδενικά τι ορίζουσα έχει;

$$det(A) = 0.$$

Αναπτύσσοντας ως προς την αντίστοιχη γραμμή (ή στήλη) που είναι όλη μηδενικά, έστω η i, παίρνουμε

$$det(A) = \underbrace{a_{i1}}_{0} \cdot C_{i1} + \underbrace{a_{i2}}_{0} C_{i2} + \ldots + \underbrace{a_{in}}_{0} C_{in} = 0$$

Ορίζουσες τριγωνικών πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ορίζουσες τριγωνικών πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς πρώτη γραμμή άρα

$$det(A) = a_{11} \cdot det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) =$$

Ορίζουσες τριγωνικών πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς πρώτη γραμμή άρα

$$det(A) = a_{11} \cdot det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\underbrace{=}_{\text{επαγωγικά}} \quad a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!