Γραμμική Άλγεβρα

Έβδομη Διάλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.
2. Εξίσωση $Ax = \beta$.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.
2. Εξίσωση $Ax = \beta$.
3. Έλεγχος για γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.
2. Εξίσωση $Ax = \beta$.
3. Έλεγχος για γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.
4. Εύρεση μιας γραμμικής σχέσης μεταξύ κάποιων διανυσμάτων όταν αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.
2. Εξίσωση $Ax = \beta$.
3. Έλεγχος για γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.
4. Εύρεση μιας γραμμικής σχέσης μεταξύ κάποιων διανυσμάτων όταν αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
5. Περιγραφή του συνόλου **όλων** των συντελεστών $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ που ικανοποιουν $0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n$ για διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.
2. Εξίσωση $Ax = \beta$.
3. Έλεγχος για γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.
4. Εύρεση μιας γραμμικής σχέσης μεταξύ κάποιων διανυσμάτων όταν αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
5. Περιγραφή του συνόλου **όλων** των συντελεστών $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ που ικανοποιουν $0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n$ για διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
6. Έλεγχος αν μια γραμμική απεικόνιση είναι 1-1.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.
2. Εξίσωση $Ax = \beta$.
3. Έλεγχος για γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.
4. Εύρεση μιας γραμμικής σχέσης μεταξύ κάποιων διανυσμάτων όταν αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
5. Περιγραφή του συνόλου **όλων** των συντελεστών $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ που ικανοποιουν $0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n$ για διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
6. Έλεγχος αν μια γραμμική απεικόνιση είναι 1-1.
7. Έλεγχος αν μια γραμμική απεικόνιση είναι επί.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.
2. Εξίσωση $Ax = \beta$.
3. Έλεγχος για γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.
4. Εύρεση μιας γραμμικής σχέσης μεταξύ κάποιων διανυσμάτων όταν αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
5. Περιγραφή του συνόλου **όλων** των συντελεστών $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ που ικανοποιουν $0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n$ για διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
6. Έλεγχος αν μια γραμμική απεικόνιση είναι 1-1.
7. Έλεγχος αν μια γραμμική απεικόνιση είναι επί.
8. Επίλυση της εξίσωσης $T(x) = b$ για κάποια δοθείσα γραμμική απεικόνιση T.

Κάποια ανακεφαλαίωση για τις 6 πρώτες διαλέξεις.

Κεντρικό πρόβλημα είναι η επίλυση γραμμικών συστημάτων. Όλα τα παρακάτω μπορούν να αναχθούν σε αυτό.

1. Διανυσματική εξίσωση.
2. Εξίσωση $Ax = \beta$.
3. Έλεγχος για γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.
4. Εύρεση μιας γραμμικής σχέσης μεταξύ κάποιων διανυσμάτων όταν αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
5. Περιγραφή του συνόλου **όλων** των συντελεστών $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ που ικανοποιουν $0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n$ για διανύσματα $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
6. Έλεγχος αν μια γραμμική απεικόνιση είναι 1-1.
7. Έλεγχος αν μια γραμμική απεικόνιση είναι επί.
8. Επίλυση της εξίσωσης $T(x) = b$ για κάποια δοθείσα γραμμική απεικόνιση T.

⋆ Άλλα ζητήματα αποτελούν: να ελέγξουμε αν μια απεικόνιση T είναι γραμμική και αν είναι να βρούμε τον πίνακα A ώστε $T(x) = Ax$.

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε ορίζουμε τον πίνακα $A + B$ με m γραμμές και n στήλες ως τον πίνακα που ικανοποιεί

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

για $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots n.$

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε ορίζουμε τον πίνακα $A + B$ με m γραμμές και n στήλες ως τον πίνακα που ικανοποιεί

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

για $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots n.$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε τον πίνακα $\lambda \cdot A$ ως τον πίνακα με m γραμμές και n στήλες ώστε

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij},$$

για $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots n.$

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω πίνακας A, B, C ίδιων διαστάσεων και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω πίνακας A, B, C ίδιων διαστάσεων και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

- Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A + 0 = 0 + A = A$

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω πίνακας A, B, C ίδιων διαστάσεων και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

- Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A + 0 = 0 + A = A$
- Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.
  - $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω πίνακας A, B, C ίδιων διαστάσεων και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

- Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A + 0 = 0 + A = A$
- Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.
  - $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$
  - $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B.$

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω πίνακας A, B, C ίδιων διαστάσεων και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

- Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A + 0 = 0 + A = A$
- Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.
  - $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$
  - $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B.$
  - $\lambda \cdot (\mu A) = \lambda \cdot \mu)A.$

Πράξεις μεταξύ πινάκων.

Έστω πίνακας A, B, C ίδιων διαστάσεων και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε

- Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει:
  - $A + B = B + A$
  - $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A + 0 = 0 + A = A$
- Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.
  - $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$
  - $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B.$
  - $\lambda \cdot (\mu A) = \lambda \cdot \mu)A.$

Παράδειγμα: $(2A + 3B) \cdot 2 - (A - B) = 4A + 6B - A + B = 3A + 7B$

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$.

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

$$(m \times n) \text{ με } (n \times k) \Rightarrow$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

$$(m \times n) \text{ με } (n \times k) \Rightarrow m \times k$$

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

$$(m \times n) \text{ με } (n \times k) \Rightarrow m \times k$$

$\star$ <u>η i-οστή στήλη του AB να ισούται με το Ab_i</u>, όπου b_i η i-οστή στήλη του B.

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

$$(m \times n) \text{ με } (n \times k) \Rightarrow m \times k$$

$\star$ η i-οστή στήλη του AB να ισούται με το Ab_i, όπου b_i η i-οστή στήλη του B.
Δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_k \in \mathbb{R}^m$,

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

$$(m \times n) \text{ με } (n \times k) \Rightarrow m \times k$$

$\star$ η i-οστή στήλη του AB να ισούται με το Ab_i, όπου b_i η i-οστή στήλη του B.
Δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_k \in \mathbb{R}^m$, και φτιάχνουμε τον πίνακα $AB = [Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_k]$.

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

$$(m \times n) \text{ με } (n \times k) \Rightarrow m \times k$$

⋆ η i-οστή στήλη του AB να ισούται με το Ab_i, όπου b_i η i-οστή στήλη του B.
Δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_k \in \mathbb{R}^m$, και φτιάχνουμε τον πίνακα $AB = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_k]$.

⋆ Αν ο AB ορίζεται αυτό **δεν** σημαίνει ότι ορίζεται και ο BA.
Παράδειγμα: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

$$(m \times n) \text{ με } (n \times k) \Rightarrow m \times k$$

⋆ η i-οστή στήλη του AB να ισούται με το Ab_i, όπου b_i η i-οστή στήλη του B.
Δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_k \in \mathbb{R}^m$, και φτιάχνουμε τον πίνακα $AB = [Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_k]$.

⋆ Αν ο AB ορίζεται αυτό **δεν** σημαίνει ότι ορίζεται και ο BA.
Παράδειγμα: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$. Ο AB αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό ενός 2×2 με έναν 2×4 ✓

Πολλαπλασιασμός πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Το γινόμενο πινάκων AB είναι ένας πίνακας $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$.

$$(m \times n) \text{ με } (n \times k) \Rightarrow m \times k$$

⋆ η i-οστή στήλη του AB να ισούται με το Ab_i, όπου b_i η i-οστή στήλη του B.
Δηλαδή υπολογίζουμε τα διανύσματα $Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_k \in \mathbb{R}^m$, και φτιάχνουμε τον πίνακα $AB = [Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_k]$.

⋆ Αν ο AB ορίζεται αυτό **δεν** σημαίνει ότι ορίζεται και ο BA.
Παράδειγμα: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$. Ο AB αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό ενός 2×2 με έναν 2×4 ✓ αλλά ο BA στον πολλαπλασιασμό ενός 2×4 με 2×2 ✗.

Παράδειγμα.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ **ο πολλαπλασιασμός ορίζεται** και έχουμε $AB \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Παράδειγμα.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ **ο πολλαπλασιασμός ορίζεται** και έχουμε $AB \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.Δείτε το σαν (3×2) με $(2 \times 4) \Rightarrow 3 \times 4$

Παράδειγμα.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ **ο πολλαπλασιασμός ορίζεται** και έχουμε $AB \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.Δείτε το σαν (3×2) με $(2 \times 4) \Rightarrow 3 \times 4$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ **ο πολλαπλασιασμός ορίζεται** και έχουμε $AB \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.Δείτε το σαν (3×2) με $(2 \times 4) \Rightarrow 3 \times 4$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Παράδειγμα.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ **ο πολλαπλασιασμός ορίζεται** και έχουμε $AB \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.Δείτε το σαν (3×2) με $(2 \times 4) \Rightarrow 3 \times 4$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ **ο πολλαπλασιασμός ορίζεται** και έχουμε $AB \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.Δείτε το σαν (3×2) με $(2 \times 4) \Rightarrow 3 \times 4$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ab_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ab_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, Ab_4 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ab_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, Ab_4 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Άλλοι τρόποι να δούμε το γινόμενο.

Για το γινόμενο AB ισχύει οτι

- $(AB)_{ij} =$ εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A με τη j-οστή στήλη του B.

Άλλοι τρόποι να δούμε το γινόμενο.

Για το γινόμενο AB ισχύει οτι

- $(AB)_{ij} =$ εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A με τη j-οστή στήλη του B.
- Αν $AB = 0$ τότε κάθε στήλη του B είναι **κάθετη** σε κάθε γραμμή του A.

Για το γινόμενο AB ισχύει οτι

- $(AB)_{ij} =$ εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A με τη j-οστή στήλη του B.
- Αν $AB = 0$ τότε κάθε στήλη του B είναι **κάθετη** σε κάθε γραμμή του A.
- $(AB)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Άλλοι τρόποι να δούμε το γινόμενο.

Για το γινόμενο AB ισχύει οτι

- $(AB)_{ij} =$ εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A με τη j-οστή στήλη του B.
- Αν $AB = 0$ τότε κάθε στήλη του B είναι **κάθετη** σε κάθε γραμμή του A.
- $(AB)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε

1. Ορίζεται η **σύνθεση** $T \circ S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ με $(S \circ T)(x) = S(T(x))$.

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε

1. Ορίζεται η **σύνθεση** $T \circ S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ με $(S \circ T)(x) = S(T(x))$.
2. Η $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση, διότι

$$S(T(\lambda x + \mu y)) =$$

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε

1. Ορίζεται η **σύνθεση** $T \circ S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ με $(S \circ T)(x) = S(T(x))$.
2. Η $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση, διότι

$$S(T(\lambda x + \mu y)) = S(\lambda T(x) + \mu T(y)) =$$

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε

1. Ορίζεται η **σύνθεση** $T \circ S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ με $(S \circ T)(x) = S(T(x))$.
2. Η $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση, διότι

$$S(T(\lambda x + \mu y)) = S(\lambda T(x) + \mu T(y)) = \lambda S(T(x)) + \mu S(T(y)).$$

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε

1. Ορίζεται η **σύνθεση** $T \circ S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ με $(S \circ T)(x) = S(T(x))$.
2. Η $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση, διότι

$$S(T(\lambda x + \mu y)) = S(\lambda T(x) + \mu T(y)) = \lambda S(T(x)) + \mu S(T(y)).$$

3. Εφόσον, S, T είναι γραμμικές απεικονίσεις υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ώστε $T(x) = Ax, S(x) = Bx$.

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε

1. Ορίζεται η **σύνθεση** $T \circ S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ με $(S \circ T)(x) = S(T(x))$.
2. Η $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση, διότι

$$S(T(\lambda x + \mu y)) = S(\lambda T(x) + \mu T(y)) = \lambda S(T(x)) + \mu S(T(y)).$$

3. Εφόσον, S, T είναι γραμμικές απεικονίσεις υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ώστε $T(x) = Ax, S(x) = Bx$.
4. Εφόσον $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση υπάρχει $C \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ώστε $(S \circ T)(x) = Cx$.

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε

1. Ορίζεται η **σύνθεση** $T \circ S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ με $(S \circ T)(x) = S(T(x))$.
2. Η $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση, διότι

$$S(T(\lambda x + \mu y)) = S(\lambda T(x) + \mu T(y)) = \lambda S(T(x)) + \mu S(T(y)).$$

3. Εφόσον, S, T είναι γραμμικές απεικονίσεις υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ώστε $T(x) = Ax, S(x) = Bx$.
4. Εφόσον $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση υπάρχει $C \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ώστε $(S \circ T)(x) = Cx$.
5. Επίσης, $(S \circ T)(x) = A(Bx) = Cx$.

Γιατί όμως ορίσαμε έτσι τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

Έστω γραμμικές απεικονίσεις $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε

1. Ορίζεται η **σύνθεση** $T \circ S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ με $(S \circ T)(x) = S(T(x))$.
2. Η $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση, διότι

$$S(T(\lambda x + \mu y)) = S(\lambda T(x) + \mu T(y)) = \lambda S(T(x)) + \mu S(T(y)).$$

3. Εφόσον, S, T είναι γραμμικές απεικονίσεις υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ώστε $T(x) = Ax, S(x) = Bx$.
4. Εφόσον $S \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση υπάρχει $C \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ώστε $(S \circ T)(x) = Cx$.
5. Επίσης, $(S \circ T)(x) = A(Bx) = Cx$.
6. Οι στήλες του C τα $(S \circ T)(e_1), (S \circ T)(e_2), \ldots$, τα οποία είναι ακριβώς τα $Ab_1, Ab_2, \ldots$.

Περισσότερη Άλγεβρα Πινάκων.

Έστω $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας που έχει 1 πάνω στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού (μοναδιαίος).

$$\text{Για } n = 3, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Περισσότερη Άλγεβρα Πινάκων.

Έστω $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας που έχει 1 πάνω στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού (μοναδιαίος).

$$\text{Για } n = 3, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

Περισσότερη Άλγεβρα Πινάκων.

Έστω $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας που έχει 1 πάνω στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού (μοναδιαίος).

$$\text{Για } n = 3, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

- $(AB)C = A(BC)$

Περισσότερη Άλγεβρα Πινάκων.

Έστω $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας που έχει 1 πάνω στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού (μοναδιαίος).

$$\text{Για } n = 3, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

- $(AB)C = A(BC)$
- (επιμεριστική ιδιότητα από αριστερά) $A(B + C) = AB + AC$

Περισσότερη Άλγεβρα Πινάκων.

Έστω $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας που έχει 1 πάνω στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού (μοναδιαίος).

$$\text{Για } n = 3, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

- $(AB)C = A(BC)$
- (επιμεριστική ιδιότητα από αριστερά) $A(B + C) = AB + AC$
- (επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά) $(B + C)A = BA + CA$

Περισσότερη Άλγεβρα Πινάκων.

Έστω $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας που έχει 1 πάνω στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού (μοναδιαίος).

$$\text{Για } n = 3, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

- $(AB)C = A(BC)$
- (επιμεριστική ιδιότητα από αριστερά) $A(B + C) = AB + AC$
- (επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά) $(B + C)A = BA + CA$
- $\lambda \cdot (AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

Περισσότερη Άλγεβρα Πινάκων.

Έστω $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας που έχει 1 πάνω στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού (μοναδιαίος).

$$\text{Για } n = 3, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

- $(AB)C = A(BC)$
- (επιμεριστική ιδιότητα από αριστερά) $A(B + C) = AB + AC$
- (επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά) $(B + C)A = BA + CA$
- $\lambda \cdot (AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.
- $IA = AI = A$

Περισσότερη Άλγεβρα Πινάκων.

Έστω $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο πίνακας που έχει 1 πάνω στη διαγώνιο και 0 οπουδήποτε αλλού (μοναδιαίος).

$$\text{Για } n = 3, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω A, B, C πίνακες κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

- $(AB)C = A(BC)$
- (επιμεριστική ιδιότητα από αριστερά) $A(B + C) = AB + AC$
- (επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά) $(B + C)A = BA + CA$
- $\lambda \cdot (AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.
- $IA = AI = A$

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

$$(A + B)^2 =$$

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) =$$

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)A - A(A+B+I) =$$

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)A - A(A+B+I) = (A^2+BA)+(-A^2-AB-A) =$$

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)A - A(A+B+I) = (A^2+BA)+(-A^2-AB-A) = BA-AB-A$$

$$A(A+I) - (A+I)A =$$

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)A - A(A+B+I) = (A^2+BA)+(-A^2-AB-A) = BA-AB-A$$

$$A(A+I) - (A+I)A = (A^2+A) - (A^2+A) =$$

Δύο παραδείγματα.

Ορίζουμε επίσης $A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A \cdot A$, και ούτω καθεξής.

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)A - A(A+B+I) = (A^2+BA)+(-A^2-AB-A) = BA-AB-A$$

$$A(A+I) - (A+I)A = (A^2+A) - (A^2+A) = 0_{n\times n},$$

όπου $0_{n\times n}$ ο $n \times n$ πίνακας που έχει παντού μηδενικά.

Ανάστροφος πίνακας.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε ο ανάστροφος πίνακας A^T είναι ένας πίνακας $\in \mathbb{R}^{n \times m}$

Ανάστροφος πίνακας.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε ο ανάστροφος πίνακας A^T είναι ένας πίνακας $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ο οποίος ικανοποιεί $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Ανάστροφος πίνακας.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε ο ανάστροφος πίνακας A^T είναι ένας πίνακας $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ο οποίος ικανοποιεί $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Οι στήλες του A^T είναι οι γραμμές του A

Ανάστροφος πίνακας.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε ο ανάστροφος πίνακας A^T είναι ένας πίνακας $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ο οποίος ικανοποιεί $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Οι στήλες του A^T είναι οι γραμμές του A και οι γραμμές του οι στήλες του A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Ανάστροφος πίνακας.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε ο ανάστροφος πίνακας A^T είναι ένας πίνακας $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ο οποίος ικανοποιεί $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Οι στήλες του A^T είναι οι γραμμές του A και οι γραμμές του οι στήλες του A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ανάστροφος πίνακας.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε ο ανάστροφος πίνακας A^T είναι ένας πίνακας $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ο οποίος ικανοποιεί $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Οι στήλες του A^T είναι οι γραμμές του A και οι γραμμές του οι στήλες του A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Ανάστροφος πίνακας.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε ο ανάστροφος πίνακας A^T είναι ένας πίνακας $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ο οποίος ικανοποιεί $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Οι στήλες του A^T είναι οι γραμμές του A και οι γραμμές του οι στήλες του A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

$\star$ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i, j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j \rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B.

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

$\star$ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i, j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j \rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B.
Άρα $((AB)^T)_{ij} =$

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

⋆ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i, j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j \rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B.
Άρα $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} =$

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

$\star$ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i, j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j \rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B. Άρα $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \langle a_j, b_i \rangle$.

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

$\star$ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i, j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j \rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B.
Άρα $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \langle a_j, b_i \rangle$.
Όμοια, $(B^T A^T)_{ij} =$

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

$\star$ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i,j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j\rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B.
Άρα $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \langle a_j, b_i\rangle$.
Όμοια, $(B^T A^T)_{ij} = \langle b_i, a_j\rangle =$

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

$\star$ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i,j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j \rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B.
Άρα $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \langle a_j, b_i \rangle$.
Όμοια, $(B^T A^T)_{ij} = \langle b_i, a_j \rangle = \langle a_j, b_i \rangle$ (γιατί;) $\checkmark$.

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

$\star$ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i, j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j \rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B.
Άρα $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \langle a_j, b_i \rangle$.
Όμοια, $(B^T A^T)_{ij} = \langle b_i, a_j \rangle = \langle a_j, b_i \rangle$ (γιατί;) $\checkmark$.

$\star$ Γενικά για πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_k$ έχουμε

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)^T = A_k^T \cdot \ldots \cdot A_2^T \cdot A_1^T.$$

Ιδιότητες Ανάστροφου Πίνακα.

Έστω A, B κατάλληλων διαστάσεων και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ και $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. (πολλαπλασιασμός πινάκων) $(AB)^T = B^T A^T$.

⋆ Απόδειξη του (4): Είπαμε ότι η εγγραφή (i, j) του AB ισούται με $\langle a_i, b_j \rangle$ όπου a_i η i-οστή **γραμμή** του A και b_j η j-οστή **στήλη** του B.
Άρα $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \langle a_j, b_i \rangle$.
Όμοια, $(B^T A^T)_{ij} = \langle b_i, a_j \rangle = \langle a_j, b_i \rangle$ (γιατί;) ✓.

⋆ Γενικά για πίνακες $A_1, A_2, \ldots, A_k$ έχουμε

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)^T = A_k^T \cdot \ldots \cdot A_2^T \cdot A_1^T.$$

Απόδειξη με επαγωγή!

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. $A^T A$

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με ένα $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με ένα $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.
7. $x \cdot x$

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με ένα $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.
7. $x \cdot x$ ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με 2×1.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με ένα $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.
7. $x \cdot x$ ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με 2×1.
8. $x \cdot x^T$

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με ένα $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.
7. $x \cdot x$ ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με 2×1.
8. $x \cdot x^T$ ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με $\underbrace{1 \times 2}_{x^T}$.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με ένα $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.
7. $x \cdot x$ ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με 2×1.
8. $x \cdot x^T$ ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με $\underbrace{1 \times 2}_{x^T}$.
9. $x^T \cdot x$

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με ένα $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.
7. $x \cdot x$ ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με 2×1.
8. $x \cdot x^T$ ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με $\underbrace{1 \times 2}_{x^T}$.
9. $x^T \cdot x$ ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{1 \times 2}_{x^T}$ με $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.

Ποιοι από τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς ορίζονται;

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}, x \in \mathbb{R}^2$.

1. AB ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με 2×3.
2. BA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×3 με 3×2.
3. AB^T ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 3×2 με $\underbrace{3 \times 2}_{B^T}$.
4. AA^T ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$.
5. A^TA ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{2 \times 3}_{A^T}$ με $\underbrace{3 \times 2}_{A}$.
6. Ax ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{3 \times 2}_{A}$ με ένα $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.
7. $x \cdot x$ ✗, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με 2×1.
8. $x \cdot x^T$ ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν 2×1 με $\underbrace{1 \times 2}_{x^T}$.
9. $x^T \cdot x$ ✓, Πολλαπλασιάζουμε έναν $\underbrace{1 \times 2}_{x^T}$ με $\underbrace{2 \times 1}_{x}$.

Παράδειγμα.

Να υπολογιστούν οι AA^T και $A^T A$ αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πάραδειγμα.

Να υπολογιστούν οι AA^T και A^TA αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

Πάραδειγμα.

Να υπολογιστούν οι AA^T και A^TA αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

Υπολογίζω τα

$$a_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{1η στήλη του } A} \quad \text{και}$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστούν οι AA^T και A^TA αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

Υπολογίζω τα

$$a_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{1η στήλη του } A} \quad \text{και} \quad a_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{2η στήλη του } A}$$

Παράδειγμα.

Να υπολογιστούν οι AA^T και A^TA αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

Υπολογίζω τα

$$a_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{1η στήλη του } A} \quad \text{και} \quad a_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{2η στήλη του } A}$$

Τότε $A^TA = [a_1, a_2]$.

Πάραδειγμα.

Να υπολογιστούν οι AA^T και A^TA αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

Υπολογίζω τα

$$a_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{1η στήλη του } A} \quad \text{και} \quad a_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{2η στήλη του } A}$$

Τότε $A^TA = [a_1, a_2]$. Τον AA^T στο φροντιστήριο!

Ανακεφαλαίωση.

- Πολλαπλασιασμός και άθροισμα πινάκων και ιδιότητές τους.
- Ανάστροφος πίνακας και ιδιότητές του.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!