Γραμμική Άλγεβρα

Πέμπτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπενθύμιση.

Είπαμε ότι για $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n$ το γινομένο $Ax \in \mathbb{R}^m$ είναι ένα διάνυσμα μήκους m του οποίου η i-οστή εγγραφή είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \vec{r}_i, \vec{x} \rangle$$

όπου r_i η i-οστή γραμμή του A.

Υπενθύμιση.

Είπαμε ότι για $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n$ το γινομένο $Ax \in \mathbb{R}^m$ είναι ένα διάνυσμα μήκους m του οποίου η i-οστή εγγραφή είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \vec{r}_i, \vec{x} \rangle$$

όπου r_i η i-οστή γραμμή του A.

$$A\vec{x} = \beta$$

Υπενθύμιση.

Είπαμε ότι για $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n$ το γινομένο $Ax \in \mathbb{R}^m$ είναι ένα διάνυσμα μήκους m του οποίου η i-οστή εγγραφή είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \vec{r}_i, \vec{x} \rangle$$

όπου r_i η i-οστή γραμμή του A.

$$A\vec{x} = \beta \Leftrightarrow x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}.$$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Έστω τα διανύσματα

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Έστω τα διανύσματα

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Μπορώ να αρχίσω να φτιάχνω γραμμικούς συνδυασμούς με αυτά τα διανύσματα, πχ

$$\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4,$$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Έστω τα διανύσματα

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Μπορώ να αρχίσω να φτιάχνω γραμμικούς συνδυασμούς με αυτά τα διανύσματα, πχ

$$\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4,$$

$$\vec{v} = \vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_4.$$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Μπορώ να παρατηρήσω ότι

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

άρα το $\vec{a}_4$ είναι γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των υπόλοιπων τριών.

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Μπορώ να παρατηρήσω ότι

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

άρα το $\vec{a}_4$ είναι γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των υπόλοιπων τριών.
Άρα

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \\
&2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - (\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \\
&\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3
\end{aligned}$$

$\star$ Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Μπορώ να παρατηρήσω ότι

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

άρα το $\vec{a}_4$ είναι γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των υπόλοιπων τριών.
Άρα

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \\
&2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - (\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \\
&\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3
\end{aligned}$$

$\star$ Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.
Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v} \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Μπορώ να παρατηρήσω ότι

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

άρα το $\vec{a}_4$ είναι γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των υπόλοιπων τριών.
Άρα

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \\
&2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - (\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \\
&\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3
\end{aligned}$$

$\star$ Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.
Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v} \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$
και άρα

$$\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \color{red}{\vec{a}_4}\} = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Μπορώ να παρατηρήσω ότι

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

άρα το $\vec{a}_4$ είναι γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των υπόλοιπων τριών.
Άρα

$$\begin{aligned}
&\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \\
&2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - (\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \\
&\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3
\end{aligned}$$

⋆ Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.
Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v} \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$
και άρα

$$\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

⋆ Αυτό δείχνει ότι υπάρχει κάποιο είδος πλεονασμού στο αρχικό σύνολο διανυσμάτων μου.

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Μπορώ να παρατηρήσω ότι

$$\vec{a}_4 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

άρα το $\vec{a}_4$ είναι γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των υπόλοιπων τριών.
Άρα

$$\begin{aligned}&\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \\ &2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - (\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \\ &\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3\end{aligned}$$

⋆ Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός **μόνο** των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.
Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v} \in \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$
και άρα

$$\mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, {\color{red}\vec{a}_4}\} = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

⋆ Αυτό δείχνει ότι υπάρχει κάποιο είδος πλεονασμού στο αρχικό σύνολο διανυσμάτων μου.

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ θα λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχει κάποιο $\vec{a}_j$ και πραγματικοί αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\vec{a}_j = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_{j-1}\vec{a}_{j-1} + c_{j+1}\vec{a}_{j+1} + \ldots + c_n\vec{a}_n,$$

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ θα λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχει κάποιο $\vec{a}_j$ και πραγματικοί αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\vec{a}_j = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_{j-1}\vec{a}_{j-1} + c_{j+1}\vec{a}_{j+1} + \ldots + c_n\vec{a}_n,$$

κοινώς αν κάποιο $\vec{a}_j$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων.

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ θα λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχει κάποιο $\vec{a}_j$ και πραγματικοί αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\vec{a}_j = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_{j-1}\vec{a}_{j-1} + c_{j+1}\vec{a}_{j+1} + \ldots + c_n\vec{a}_n,$$

κοινώς αν κάποιο $\vec{a}_j$ μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

$$\begin{aligned} \vec{a}_3 &= -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_5, \\ \vec{a}_4 &= \vec{a}_2 - \vec{a}_5. \end{aligned}$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιο διάνυσμα, τότε τα διανύσματα λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα**.

Πίσω στο παράδειγμα του Πανοραμίξ.

Ο Πανοραμίξ είχε n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ και μπορούσε να παράξει μια συνταγή παίρνοντας έναν γραμμικό συνδυασμό αυτών των διανυσμάτων, πχ

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n.$$

Πίσω στο παράδειγμα του Πανοραμίξ.

Ο Πανοραμίξ είχε n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ και μπορούσε να παράξει μια συνταγή παίρνοντας έναν γραμμικό συνδυασμό αυτών των διανυσμάτων, πχ

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n.$$

Ήθελε να κρατήσει το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων που του επιτρέπουν να παράξει όποια συνταγή μπορούσε να παράξει και πριν.

Πίσω στο παράδειγμα του Πανοραμίξ.

Ο Πανοραμίξ είχε n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ και μπορούσε να παράξει μια συνταγή παίρνοντας έναν γραμμικό συνδυασμό αυτών των διανυσμάτων, πχ

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n.$$

Ήθελε να κρατήσει το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων που του επιτρέπουν να παράξει όποια συνταγή μπορούσε να παράξει και πριν. Κοινώς, ήθελε να βρει ένα υποσύνολο $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_r\} \subseteq \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$

Πίσω στο παράδειγμα του Πανοραμίξ.

Ο Πανοραμίξ είχε n διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ και μπορούσε να παράξει μια συνταγή παίρνοντας έναν γραμμικό συνδυασμό αυτών των διανυσμάτων, πχ

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n.$$

Ήθελε να κρατήσει το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων που του επιτρέπουν να παράξει όποια συνταγή μπορούσε να παράξει και πριν. Κοινώς, ήθελε να βρει ένα υποσύνολο $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_r\} \subseteq \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ έτσι ώστε

$$\operatorname{span}\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_r\} = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας Ι.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας Ι.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

$\star$ Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας I.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

⋆ Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:
(με απαγωγή σε άτοπο)

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

⋆ Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:
(με απαγωγή σε άτοπο)
Σίγουρα το $\vec{0}$ γράφεται πάντα ως $0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$.

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας I.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

⋆ Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:
(με απαγωγή σε άτοπο)
Σίγουρα το $\vec{0}$ γράφεται πάντα ως $0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$.
Αν γραφόταν και με άλλο τρόπο τότε θα υπήρχαν $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **όχι όλα μηδέν** έτσι ώστε $\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$.

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας Ι.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:
$\star$ Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:
(με απαγωγή σε άτοπο)
Σίγουρα το $\vec{0}$ γράφεται πάντα ως $0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$.
Αν γραφόταν και με άλλο τρόπο τότε θα υπήρχαν $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **όχι όλα μηδέν** έτσι ώστε $\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$. Έστω κάποιο j με $c_j \neq 0$

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας I.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

⋆ Γραμμική Ανεξαρτησία ⇒ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:

(με απαγωγή σε άτοπο)

Σίγουρα το $\vec{0}$ γράφεται πάντα ως $0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$.

Αν γραφόταν και με άλλο τρόπο τότε θα υπήρχαν $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **όχι όλα μηδέν** έτσι ώστε $\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$. Έστω κάποιο j με $c_j \neq 0$, τότε

$$\vec{a}_j = -\frac{c_1}{c_j}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\vec{a}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\vec{a}_{j+1} - \ldots - \frac{c_n}{c_j}\vec{a}_n$$

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας I.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

⋆ Γραμμική Ανεξαρτησία ⇒ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:
(με απαγωγή σε άτοπο)
Σίγουρα το $\vec{0}$ γράφεται πάντα ως $0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$.
Αν γραφόταν και με άλλο τρόπο τότε θα υπήρχαν $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **όχι όλα μηδέν** έτσι ώστε $\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$. Έστω κάποιο j με $c_j \neq 0$, τότε

$$\vec{a}_j = -\frac{c_1}{c_j}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\vec{a}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\vec{a}_{j+1} - \ldots - \frac{c_n}{c_j}\vec{a}_n,$$

άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, άτοπο!

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας I.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:
⋆ Γραμμική Ανεξαρτησία ⇒ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:
(με απαγωγή σε άτοπο)
Σίγουρα το $\vec{0}$ γράφεται πάντα ως $0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$.
Αν γραφόταν και με άλλο τρόπο τότε θα υπήρχαν $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **όχι όλα μηδέν** έτσι ώστε $\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$. Έστω κάποιο j με $c_j \neq 0$, τότε

$$\vec{a}_j = -\frac{c_1}{c_j}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\vec{a}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\vec{a}_{j+1} - \ldots - \frac{c_n}{c_j}\vec{a}_n,$$

άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, άτοπο!(για παράδειγμα $\vec{0} = 22\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3 + \vec{a}_4$

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας I.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν καια μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

$\star$ Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική γραφή του $\vec{0}$:
(με απαγωγή σε άτοπο)
Σίγουρα το $\vec{0}$ γράφεται πάντα ως $0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$.
Αν γραφόταν και με άλλο τρόπο τότε θα υπήρχαν $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **όχι όλα μηδέν** έτσι ώστε $\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$. Έστω κάποιο j με $c_j \neq 0$, τότε

$$\vec{a}_j = -\frac{c_1}{c_j}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\vec{a}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\vec{a}_{j+1} - \ldots - \frac{c_n}{c_j}\vec{a}_n,$$

άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, άτοπο!(για παράδειγμα $\vec{0} = 22\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3 + \vec{a}_4$ δίνει $\vec{a}_2 = \frac{3}{22}\vec{a}_3 - \frac{1}{22}\vec{a}_4$)

Συνέχεια απόδειξης.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

$\star$ Μοναδική γραφή του $\vec{0} \Rightarrow$ Γραμμική Ανεξαρτησία:

Συνέχεια απόδειξης.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

$\star$ Μοναδική γραφή του $\vec{0} \Rightarrow$ Γραμμική Ανεξαρτησία:
(με απαγωγή σε άτοπο)

Συνέχεια απόδειξης.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

$\star$ Μοναδική γραφή του $\vec{0} \Rightarrow$ Γραμμική Ανεξαρτησία:
(με απαγωγή σε άτοπο)
Έστω ότι τα διανύσματα ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, άρα

$$\vec{a}_j = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_{j-1}\vec{a}_{j-1} + c_{j+1}\vec{a}_{j+1} + \ldots + c_n\vec{a}_n,$$

για κάποιο $\vec{a}_j$ και κάποια $c_1, c_2, \ldots c_n$. Τότε

Συνέχεια απόδειξης.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν το διάνυσμα $\vec{0}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

$\star$ Μοναδική γραφή του $\vec{0} \Rightarrow$ Γραμμική Ανεξαρτησία:
(με απαγωγή σε άτοπο)
Έστω ότι τα διανύσματα ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, άρα

$$\vec{a}_j = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_{j-1}\vec{a}_{j-1} + c_{j+1}\vec{a}_{j+1} + \ldots + c_n\vec{a}_n,$$

για κάποιο $\vec{a}_j$ και κάποια $c_1, c_2, \ldots c_n$. Τότε

$$\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots - \vec{a}_j + \ldots c_n\vec{a}_n.$$

Άρα πήραμε μια άλλη γραφή του $\vec{0}$, άτοπο!

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας ΙΙ.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη:

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας II.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική Γραφή:

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική Γραφή:
Αν υπήρχε κάποιο $\vec{c}$ για το οποίο υπήρχαν δύο γραφές
$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$ και $\vec{v} = c_1'\vec{a}_1 + \ldots c_n'\vec{a}_n$ τότε

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας II.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική Γραφή:
Αν υπήρχε κάποιο $\vec{c}$ για το οποίο υπήρχαν δύο γραφές $\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$ και $\vec{v} = c_1'\vec{a}_1 + \ldots c_n'\vec{a}_n$ τότε

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (c_1 - c_1')\vec{a}_1 + \ldots + (c_n - c_n')\vec{a}_n,$$

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας ΙΙ.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική Γραφή:
Αν υπήρχε κάποιο $\vec{c}$ για το οποίο υπήρχαν δύο γραφές $\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$ και $\vec{v} = c_1'\vec{a}_1 + \ldots c_n'\vec{a}_n$ τότε

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (c_1 - c_1')\vec{a}_1 + \ldots + (c_n - c_n')\vec{a}_n,$$

και επειδή για **τουλάχιστον ένα** j ισχύει ότι $c_j - c_j' \neq 0$

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας II.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική Γραφή:
Αν υπήρχε κάποιο $\vec{c}$ για το οποίο υπήρχαν δύο γραφές $\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$ και $\vec{v} = c_1'\vec{a}_1 + \ldots c_n'\vec{a}_n$ τότε

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (c_1 - c_1')\vec{a}_1 + \ldots + (c_n - c_n')\vec{a}_n,$$

και επειδή για **τουλάχιστον ένα** j ισχύει ότι $c_j - c_j' \neq 0$ (διότι οι γραφές δεν συμπτίπτουν) τότε

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας ΙΙ.

Θεώρημα

*Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με **μοναδικό** τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Γραμμική Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ Μοναδική Γραφή:
Αν υπήρχε κάποιο $\vec{c}$ για το οποίο υπήρχαν δύο γραφές
$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n$ και $\vec{v} = c_1'\vec{a}_1 + \ldots c_n'\vec{a}_n$ τότε

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (c_1 - c_1')\vec{a}_1 + \ldots + (c_n - c_n')\vec{a}_n,$$

και επειδή για **τουλάχιστον ένα** j ισχύει ότι $c_j - c_j' \neq 0$ (διότι οι γραφές δεν συμπτίπτουν) τότε το $\vec{0}$ γράφεται με έναν ακόμη τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, άτοπο!

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας ΙΙ.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Μοναδική Γραφή $\Rightarrow$ Γραμμική Ανεξαρτησία:

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας ΙΙ.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Μοναδική Γραφή $\Rightarrow$ Γραμμική Ανεξαρτησία:
Έστω ότι ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή κάποιο $\vec{a}_j$ ήταν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Θέωρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας II.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Μοναδική Γραφή $\Rightarrow$ Γραμμική Ανεξαρτησία:
Έστω ότι ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή κάποιο $\vec{a}_j$ ήταν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Τότε το ίδιο το $\vec{a}_j$ έχει δύο γραφές ως γραμμικός συνδυασμός! Ποιες;

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν κάθε διάνυσμα $\vec{\beta} \in \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να γραφτεί με ***μοναδικό*** *τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Απόδειξη: Μοναδική Γραφή $\Rightarrow$ Γραμμική Ανεξαρτησία:
Έστω ότι ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή κάποιο $\vec{a}_j$ ήταν γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Τότε το ίδιο το $\vec{a}_j$ έχει δύο γραφές ως γραμμικός συνδυασμός! Ποιες;

Πχ $\vec{a}_2 = 1 \cdot \vec{a}_2$ (τετριμμένη γραφή) και $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_4$ (γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων)

Γραμμική Ανεξαρτησία: επί του πρακτέου.

Άρα αν μου δώσουν ας πούμε κάποια διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, τι πρέπει να κάνω για να δω αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

Γραμμική Ανεξαρτησία: επί του πρακτέου.

Άρα αν μου δώσουν ας πούμε κάποια διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, τι πρέπει να κάνω για να δω αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

Λόγω του πρώτου Θεωρήματος, αρκεί να εξετάσω αν το $\vec{0}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους

$$\Longleftrightarrow$$

Γραμμική Ανεξαρτησία: επί του πρακτέου.

Άρα αν μου δώσουν ας πούμε κάποια διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, τι πρέπει να κάνω για να δω αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

Λόγω του πρώτου Θεωρήματος, αρκεί να εξετάσω αν το $\vec{0}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους

$$\iff$$

$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_n\vec{a}_n = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση (όλα τα $c_i = 0$)

$$\iff$$

Γραμμική Ανεξαρτησία: επί του πρακτέου.

Άρα αν μου δώσουν ας πούμε κάποια διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, τι πρέπει να κάνω για να δω αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

Λόγω του πρώτου Θεωρήματος, αρκεί να εξετάσω αν το $\vec{0}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους

$$\Longleftrightarrow$$

$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_n\vec{a}_n = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση (όλα τα $c_i = 0$)

$$\Longleftrightarrow$$

$A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση (το $\vec{0}$),

Γραμμική Ανεξαρτησία: επί του πρακτέου.

Άρα αν μου δώσουν ας πούμε κάποια διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, τι πρέπει να κάνω για να δω αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

Λόγω του πρώτου Θεωρήματος, αρκεί να εξετάσω αν το $\vec{0}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους

$$\Longleftrightarrow$$

$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots c_n\vec{a}_n = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση (όλα τα $c_i = 0$)

$$\Longleftrightarrow$$

$A\vec{x} = \vec{0}$ έχει μοναδική λύση (το $\vec{0}$), άρα αρκεί να λύσω ένα γραμμικό σύστημα!

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας ΙΙΙ.

Θεώρημα

Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν ο αντίστοιχος πίνακας A με στήλες τα $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ έχει ακριβώς n βασικές μεταβλητές, δηλαδή ο βαθμός του ισούται με n.

Παράδειγμα Ι.

Είναι τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

γραμμκώς ανεξάρτητα;

Παράδειγμα I.

Είναι τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

γραμμκώς ανεξάρτητα;

Ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα Ι.

Είναι τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

γραμμκώς ανεξάρτητα;

Ο πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{\text{απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

έχει 3 βασικές μεταβλητές, άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα II.

Να εξετάσετε αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα II.

Να εξετάσετε αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{Απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα II.

Να εξετάσετε αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{\text{Απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right]$$

Ψπάρχουν τρεις οδηγοί και τρεις στήλες, άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα ΙΙ.

Να εξετάσετε αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 4 & 0\\1 & 2 & -1 & 0\\5 & 8 & 0 & 0\end{array}\right] \Rightarrow_{\texttt{Απαλοιφή Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c}{\color{red}1} & 2 & -1 & 0\\0 & {\color{red}1} & 4 & 0\\0 & 0 & {\color{red}13} & 0\end{array}\right]$$

Ψπάρχουν τρεις οδηγοί και τρεις στήλες, άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παρατήρηση: Μπορούμε να βρούμε ποιες είναι οι βασικές μεταβλητές και από την κλιμακωτή μορφή, δεν χρειάζεται να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή.

Παράδειγμα III.

Είναι τα παρακάτω διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα III.

Είναι τα παρακάτω διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα;

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 5 & 1\\3 & 6 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

Παράδειγμα ΙΙΙ.

Είναι τα παρακάτω διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα;

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 5 & 1\\3 & 6 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\color{red}{1} & 4 & 2\\0 & \color{red}{-3} & -3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα III.

Είναι τα παρακάτω διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα;

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 5 & 1\\3 & 6 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\color{red}{1} & 4 & 2\\0 & \color{red}{-3} & -3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ψπάρχουν δύο οδηγοί άρα δύο βασικές μεταβλητές αντί για 3, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Παράδειγμα III.

Είναι τα παρακάτω διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα;

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 5 & 1\\3 & 6 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\0 & -3 & -3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ψπάρχουν δύο οδηγοί άρα δύο βασικές μεταβλητές αντί για 3, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Παρατήρηση: Δεν χρειάζεται να κουβαλάμε την τελευταία στήλη, διότι είναι πάντα το $\vec{0}$.

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας IV.

Ερώτηση: Μπορούν τρία διανύσματα στο επίπεδο (στο $\mathbb{R}^2$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα;

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας IV.

Ερώτηση: Μπορούν τρία διανύσματα στο επίπεδο (στο $\mathbb{R}^2$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Μπορούν 4 διανύσματα στον χώρο (στο $\mathbb{R}^3$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ;

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας IV.

Ερώτηση: Μπορούν τρία διανύσματα στο επίπεδο (στο $\mathbb{R}^2$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Μπορούν 4 διανύσματα στον χώρο (στο $\mathbb{R}^3$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ;

Θεώρημα

Έστω $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Αν $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε $n \leq m$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι πλήθος βασικών μεταβλητών (βαθμός) $=$ πλήθος οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας IV.

Ερώτηση: Μπορούν τρία διανύσματα στο επίπεδο (στο $\mathbb{R}^2$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Μπορούν 4 διανύσματα στον χώρο (στο $\mathbb{R}^3$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ;

Θεώρημα

Έστω $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Αν $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε $n \leq m$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι πλήθος βασικών μεταβλητών (βαθμός) $=$ πλήθος οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $\leq$ γραμμών $= m$.

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας IV.

Ερώτηση: Μπορούν τρία διανύσματα στο επίπεδο (στο $\mathbb{R}^2$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Μπορούν 4 διανύσματα στον χώρο (στο $\mathbb{R}^3$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ;

Θεώρημα

Έστω $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Αν $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε $n \leq m$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι πλήθος βασικών μεταβλητών (βαθμός) $=$ πλήθος οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $\leq$ γραμμών $= m$.

Άρα έχουμε (πλήθος ελεύθερων μεταβλητών) $=$ (πλήθος στηλών) - (πλήθων βασικών) $\geq n - m > 0$

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας IV.

Ερώτηση: Μπορούν τρία διανύσματα στο επίπεδο (στο $\mathbb{R}^2$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Μπορούν 4 διανύσματα στον χώρο (στο $\mathbb{R}^3$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ;

Θεώρημα

Έστω $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Αν $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε $n \leq m$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι πλήθος βασικών μεταβλητών (βαθμός) $=$ πλήθος οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $\leq$ γραμμών $= m$.

Άρα έχουμε (πλήθος ελεύθερων μεταβλητών) $=$ (πλήθος στηλών) - (πλήθων βασικών) $\geq n - m > 0 \Rightarrow$

Θεώρημα Γραμμικής Ανεξαρτησίας IV.

Ερώτηση: Μπορούν τρία διανύσματα στο επίπεδο (στο $\mathbb{R}^2$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Μπορούν 4 διανύσματα στον χώρο (στο $\mathbb{R}^3$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ;

Θεώρημα

Έστω $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Αν $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε $n \leq m$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι πλήθος βασικών μεταβλητών (βαθμός) $=$ πλήθος οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $\leq$ γραμμών $= m$.

Άρα έχουμε (πλήθος ελεύθερων μεταβλητών) $=$ (πλήθος στηλών) - (πλήθων βασικών) $\geq n - m > 0 \Rightarrow$ το σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ δεν έχει μοναδική λύση

Ερώτηση: Μπορούν τρία διανύσματα στο επίπεδο (στο $\mathbb{R}^2$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Μπορούν 4 διανύσματα στον χώρο (στο $\mathbb{R}^3$) να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ;

Θεώρημα

Έστω $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Αν $n > m$ τότε τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε $n \leq m$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι πλήθος βασικών μεταβλητών (βαθμός) $=$ πλήθος οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $\leq$ γραμμών $= m$.

Άρα έχουμε (πλήθος ελεύθερων μεταβλητών) $=$ (πλήθος στηλών) - (πλήθων βασικών) $\geq n - m > 0 \Rightarrow$ το σύστημα $A\vec{x} = \vec{0}$ δεν έχει μοναδική λύση $\Rightarrow$ διανύσματα γραμμικώς εξαρτημένα.

Παράδειγμα.

Είναι παρακάτω διανύσματα γραμμικώς εξαρτημένα;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 734 \\ 347 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα.

Είναι παρακάτω διανύσματα γραμμικώς εξαρτημένα;

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\734\\347\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-2\\5\end{bmatrix}$$

Σίγουρα! Έχω 4 διανύσματα σε 3 διαστάσεις.

Μια απλή ιδιότητα.

Έστω γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Τότε αν κρατήσω μόνο r από αυτά, τότε και αυτά θα είνα γραμμικώς ανεξάρτητα.

Μια απλή ιδιότητα.

Έστω γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Τότε αν κρατήσω μόνο r από αυτά, τότε και αυτά θα είνα γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα. Αν $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά για παράδειγμα τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ γραμμικώς εξαρτημένα θα έχουμε ότι

Μια απλή ιδιότητα.

Έστω γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Τότε αν κρατήσω μόνο r από αυτά, τότε και αυτά θα είνα γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα. Αν $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά για παράδειγμα τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ γραμμικώς εξαρτημένα θα έχουμε ότι

$$\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3$$

για $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν.

Μια απλή ιδιότητα.

Έστω γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Τότε αν κρατήσω μόνο r από αυτά, τότε και αυτά θα είνα γραμμικώς ανεξάρτητα.

Παράδειγμα. Αν $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά για παράδειγμα τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ γραμμικώς εξαρτημένα θα έχουμε ότι

$$\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3$$

για $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν.

Τότε ισχύει

$$\vec{0} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + 0 \cdot \vec{a}_4$$

άρα έχω δύο γραφές για το διάνυσμα $\vec{0}$ χρησιμοποιώντας τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

1. Τον ορισμό της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων.
2. Πως να ελέγξουμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (με αναγωγή στην επίλυση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{0}$).
3. Ότι στον $\mathbb{R}^n$ αν έχουμε $\geq n+1$ διανύσματα τότε σίγουρα αυτά θα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!