Γραμμική Άλγεβρα

Τρίτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή. Ένας οδηγός στον ανηγμένο κλιμακωτό πρέπει να μην έχει μη μηδενικά $\leftarrow, \uparrow, \downarrow$ του.

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή. Ένας οδηγός στον ανηγμένο κλιμακωτό πρέπει να μην έχει μη μηδενικά $\leftarrow, \uparrow, \downarrow$ του. Κάθε στήλη μπορεί να έχει ακριβώς έναν οδηγό (λόγω της ιδιότητας της σκάλας).

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή. Ένας οδηγός στον ανηγμένο κλιμακωτό πρέπει να μην έχει μη μηδενικά $\leftarrow, \uparrow, \downarrow$ του. Κάθε στήλη μπορεί να έχει ακριβώς έναν οδηγό (λόγω της ιδιότητας της σκάλας).

Βασικές μεταβλητή: Μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγό.

Ελεύθερες μεταβλητές : Μη-μηδενικές στήλες χωρίς οδηγό.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 12 & 0 & -9 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

x_1, x_2, x_4: Βασικές μεταβλητές ενώ x_3, x_5: Ελεύθερες μεταβλητές.

Ένα ακόμη παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Η πρώτη, δεύτερη και πέμπτη στήλη έχουν οδηγό, άρα οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι βασικές.
Η τρίτη και τέταρτη στήλη δεν έχουν οδηγό, άρα οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι ελεύθερες.

Βασικές: x_1, x_2, x_5, ελεύθερες: x_3, x_4.

Ο πρώτος μας στόχος.

Όπως έχουμε πει, ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- **Καμία** λύση
- **Ακριβώς** μία λύση (συμβατό)
- **Άπειρες λύσεις** (υπερ-ορισμένο)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για να βρούμε σε ποια περιπτώση ανήκουμε;

Επίλυση μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Όλες οι μεταβλητές είναι βασικές!

$$x_1 = 3, x_2 = -7, x_3 = 4$$

Ένα ακόμη παράδειγμα επίλυσης μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ένα ακόμη παράδειγμα επίλυσης μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -24$$

$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7$$

$$x_5 = 4$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

Ένα ακόμη παράδειγμα επίλυσης μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -24$$
$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7$$
$$x_5 = 4$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

$$x_1 = 2x_3 - 3x_4 - 24$$
$$x_2 = 2x_3 + 2x_4 - 7$$
$$x_5 = 4$$

Η τομή δύο επιπέδων.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Η τομή δύο επιπέδων.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_2-\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2, Ελεύθερες μεταβλητές x_3

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 \\ x_2 &= -4x_3 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2, Ελεύθερες μεταβλητές x_3

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 \\ x_2 &= -4x_3 \end{aligned}$$

Άρα η τομή των δύο επιπέδων μορφή περιέχει τα σημεία (ονομάζουμε $t := x_3$)

$$(2t, -4t, t) = t \cdot (2, -4, 1).$$

Η τομή δύο επιπέδων.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2, Ελεύθερες μεταβλητές x_3

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 \\ x_2 &= -4x_3 \end{aligned}$$

Άρα η τομή των δύο επιπέδων μορφή περιέχει τα σημεία (ονομάζουμε $t := x_3$)

$$(2t, -4t, t) = t \cdot (2, -4, 1).$$

Αυτό είναι μια ευθεία.

Θεώρημα

Ένα γραμμικό σύστημα είναι συμβατό όταν η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου του πίνακα δεν έχει γραμμή της μορφής

$$[0, 0, \ldots, 0|b], b \neq 0,$$

δηλαδή εξίσωση της μορφής

$$0 = b, b \neq 0.$$

Μοναδική Λύση: **Καμία** ελεύθερη μεταβλητή.
Άπειρες Λύσεις: **Τουλάχιστον μία** ελεύθερη μεταβλητή.

Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Θεώρημα

Ένα γραμμικό σύστημα είναι συμβατό όταν η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου του πίνακα δεν έχει γραμμή της μορφής

$$[0, 0, \ldots, 0|b], b \neq 0,$$

δηλαδή εξίσωση της μορφής

$$0 = b, b \neq 0.$$

Μοναδική Λύση: **Καμία** ελεύθερη μεταβλητή.
Άπειρες Λύσεις: **Τουλάχιστον μία** ελεύθερη μεταβλητή.

Ελεύθερες Μεταβλητές

Στο εξής αναφερόμαστε σε συστήματα που έχουν τουλάχιστον μία λύση.

1. Καμία ελεύθερη μεταβλητή $\Rightarrow$ καμία ή μοναδική λύση.
2. Μία ελεύθερη μεταβλητή $\Rightarrow$ χώρος λύσεων είναι ευθεία.
3. Δύο ελεύθερες μεταβλητές $\Rightarrow$ χώρος λύσεων είναι επίπεδο.

Ελεύθερες Μεταβλητές

Στο εξής αναφερόμαστε σε συστήματα που έχουν τουλάχιστον μία λύση.

1. Καμία ελεύθερη μεταβλητή $\Rightarrow$ καμία ή μοναδική λύση.
2. Μία ελεύθερη μεταβλητή $\Rightarrow$ χώρος λύσεων είναι ευθεία.
3. Δύο ελεύθερες μεταβλητές $\Rightarrow$ χώρος λύσεων είναι επίπεδο.
4. Τρεις ελεύθερες μεταβλητές και πάνω $\Rightarrow$ χώρος λύσεων είναι υπερεπίπεδο.

Ελεύθερες Μεταβλητές

Στο εξής αναφερόμαστε σε συστήματα που έχουν τουλάχιστον μία λύση.

1. Καμία ελεύθερη μεταβλητή $\Rightarrow$ καμία ή μοναδική λύση.
2. Μία ελεύθερη μεταβλητή $\Rightarrow$ χώρος λύσεων είναι ευθεία.
3. Δύο ελεύθερες μεταβλητές $\Rightarrow$ χώρος λύσεων είναι επίπεδο.
4. Τρεις ελεύθερες μεταβλητές και πάνω $\Rightarrow$ χώρος λύσεων είναι υπερεπίπεδο.

Μπορώ να θέσω στις ελεύθερες μεταβλητές ό,τι τιμή θέλω:

Ελεύθερες Μεταβλητές

Στο εξής αναφερόμαστε σε συστήματα που έχουν τουλάχιστον μία λύση.

1. Καμία ελεύθερη μεταβλητή ⇒ καμία ή μοναδική λύση.
2. Μία ελεύθερη μεταβλητή ⇒ χώρος λύσεων είναι ευθεία.
3. Δύο ελεύθερες μεταβλητές ⇒ χώρος λύσεων είναι επίπεδο.
4. Τρεις ελεύθερες μεταβλητές και πάνω ⇒ χώρος λύσεων είναι υπερεπίπεδο.

Μπορώ να θέσω στις ελεύθερες μεταβλητές ό,τι τιμή θέλω: αν θέσω κάποιες συγκεκριμένες τιμές σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές, τότε αυτό ορίζει μια **μοναδική** λύση των βασικών μεταβλητών.

Επιστροφή στο παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

Επιστροφή στο παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

$$x_1 = 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 - 24$$

$$x_2 = 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 - 7$$

$$x_5 = 4$$

Επιστροφή στο παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

$$x_1 = 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 - 24$$

$$x_2 = 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 - 7$$

$$x_5 = 4$$

Μπορού, να θέσουμε στις ελεύθερες μεταβλητές x_3, x_4 ό,τι τιμή θέλουμε και αυτό ορίζει με μοναδικό τρόπο τις βασικές μεταβλητές x_1, x_2, x_5.

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Αν φέρουμε τον πρώτο πίνακα σε ανηγμένη
κλιμακωτή μορφή, πρέπει να κάνουμε **όλη** τη δουλειά και για τον δεύτερο;

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Αν φέρουμε τον πρώτο πίνακα σε ανηγμένη
κλιμακωτή μορφή, πρέπει να κάνουμε **όλη** τη δουλειά και για τον δεύτερο;

Τα βήματα που κάνει η απαλοιφή Gauss εξαρτούνται **μόνο** από τον πίνακα συντελεστών και **όχι** από τους σταθερούς όρους.

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Αν φέρουμε τον πρώτο πίνακα σε ανηγμένη
κλιμακωτή μορφή, πρέπει να κάνουμε **όλη** τη δουλειά και για τον δεύτερο;

Τα βήματα που κάνει η απαλοιφή Gauss εξαρτούνται **μόνο** από τον πίνακα συντελεστών και **όχι** από τους σταθερούς όρους.
Συμπέρασμα: Αν βρούμε τις γραμμοπράξεις που κάνει για τον πρώτο πίνακα η απαλοιφή Gauss, οι **ίδιες** γραμμοπράξεις φέρνουν και τον δεύτερο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή!

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Αν φέρουμε τον πρώτο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, πρέπει να κάνουμε **όλη** τη δουλειά και για τον δεύτερο;

Τα βήματα που κάνει η απαλοιφή Gauss εξαρτούνται **μόνο** από τον πίνακα συντελεστών και **όχι** από τους σταθερούς όρους.
Συμπέρασμα: Αν βρούμε τις γραμμοπράξεις που κάνει για τον πρώτο πίνακα η απαλοιφή Gauss, οι **ίδιες** γραμμοπράξεις φέρνουν και τον δεύτερο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή! Το μόνο που αλλάζει είναι ποιοι είναι οι σταθεροί όροι!

Για να το δούμε στην πράξη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

Για να το δούμε στην πράξη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_2-2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2:=\frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1:=\Gamma_1-\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 0 & 2 & -6 \\ 0 & \color{red}{1} & -1 & 5 \end{array}\right]$$

Για να το δούμε στην πράξη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0 & 8\end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_2-2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -2 & 10\end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2:=\frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 5\end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1:=\Gamma_1-\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & -6\\ 0 & 1 & -1 & 5\end{array}\right]$$

Άρα κάναμε τις γραμμοπράξεις

$$\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

Και για τον δεύτερο πίνακα.

Αν κάνουμε ακριβώς τις ίδιες γραμμοπράξεις με πριν

$$\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

Και για τον δεύτερο πίνακα.

Αν κάνουμε ακριβώς τις ίδιες γραμμοπράξεις με πριν

$$\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

Και για τον δεύτερο πίνακα.

Αν κάνουμε ακριβώς τις ίδιες γραμμοπράξεις με πριν

$$\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

Ίδιος πίνακας συντελεστών και μόνο οι σταθεροί όροι αλλάζουν.

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_2-2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2:=\frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1:=\Gamma_1-\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} \color{red}{1} & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & \color{red}{1} & -1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Άρα μπορούμε να βρούμε το σύνολο λύσεων για κάθε σύστημα ξεχωριστά πλέον (βασικές και ελεύθερες μεταβλητές).

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_2-2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2:=\frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1:=\Gamma_1-\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

Άρα μπορούμε να βρούμε το σύνολο λύσεων για κάθε σύστημα ξεχωριστά πλέον (βασικές και ελεύθερες μεταβλητές).

Λύσεις:
Πρώτο Σύστημα:$x = -6 - 2z, y = 5 + z$,
Δεύτερο Σύστημα: $x = -2 - 2z, y = 2 + z$

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και έστω ότι έχει r βασικές μεταβλητές και $n-r$ ελεύθερες μεταβλητές[1].

[1] Προσοχή, εδώ ο πίνακας δεν είναι επαυξημένος.

Βαθμός Πίνακα.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και έστω ότι έχει r βασικές μεταβλητές και $n-r$ ελεύθερες μεταβλητές[1].

Ορίζουμε ως βαθμό ενός $m \times n$ πίνακα τον αριθμός r, δηλαδή το πλήθος των βασικών μεταβλητών.

[1] Προσοχή, εδώ ο πίνακας δεν είναι επαυξημένος.

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο).

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο).
Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο $\mathbb{R}^3$ (χώρο).

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο).
Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο $\mathbb{R}^3$ (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\Big\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1\Big\}$$

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο).
Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο $\mathbb{R}^3$ (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\Big\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1\Big\}$$

Το σύνολο $\{(x, y, z, w) : 2x + 3y + z = 1\}$ **δεν** είναι ένα επίπεδο, διότι

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x,y) : 2x+3y=1\}$ είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο).
Το σύνολο $\{(x,y,z) : 2x+3y=1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο $\mathbb{R}^3$ (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\Big\{(x,y,z) : 2x+3y=1, 3y+2z=1\Big\}$$

Το σύνολο $\{(x,y,z,w) : 2x+3y+z=1\}$ **δεν** είναι ένα επίπεδο, διότι είμαστε στις 4 διαστάσεις, είναι ένα υπερεπίπεδο.

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο).
Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο $\mathbb{R}^3$ (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\Big\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1\Big\}$$

Το σύνολο $\{(x, y, z, w) : 2x + 3y + z = 1\}$ **δεν** είναι ένα επίπεδο, διότι είμαστε στις 4 διαστάσεις, είναι ένα υπερεπίπεδο.
$\star$ Αντίστοιχα, ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^4$ εκφράζεται ως τομή δύο υπερεπιπέδων (σύστημα δύο εξισώσεων με 4 αγνώστους)

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο).
Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο $\mathbb{R}^3$ (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\Big\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1\Big\}$$

Το σύνολο $\{(x, y, z, w) : 2x + 3y + z = 1\}$ **δεν** είναι ένα επίπεδο, διότι είμαστε στις 4 διαστάσεις, είναι ένα υπερεπίπεδο.
$\star$ Αντίστοιχα, ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^4$ εκφράζεται ως τομή δύο υπερεπιπέδων (σύστημα δύο εξισώσεων με 4 αγνώστους) και μία ευθεία ως τομή τριών υπερεπιπέδων (σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους).

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο).
Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο $\mathbb{R}^3$ (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\Big\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1\Big\}$$

Το σύνολο $\{(x, y, z, w) : 2x + 3y + z = 1\}$ **δεν** είναι ένα επίπεδο, διότι είμαστε στις 4 διαστάσεις, είναι ένα υπερεπίπεδο.
$\star$ Αντίστοιχα, ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^4$ εκφράζεται ως τομή δύο υπερεπιπέδων (σύστημα δύο εξισώσεων με 4 αγνώστους) και μία ευθεία ως τομή τριών υπερεπιπέδων (σύστημα 3 εξισώσεων με 4 αγνώστους).

Άρα πάντα το πλαίσιο (περιβάλλοντας χώρος) μετράει!

Διανύσματα

⋆ Διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα πίνακας με n γραμμές και *μία* στήλη με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Το n είναι το *μήκος* ή **διάσταση** του διανύσματος.

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Διανύσματα

$\star$ Διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα πίνακας με n γραμμές και *μία* στήλη με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Το n είναι το *μήκος* ή **διάσταση** του διανύσματος.

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα γραμμή:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -12 \end{bmatrix}$$

Πίνακες και διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να δούμε τον πίνακα σαν την *οριζόντια* παράθεση 3 διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^4$, για την ακρίβεια των τριών **στηλών** του:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να δούμε τον πίνακα σαν την *οριζόντια* παράθεση 3 διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^4$, για την ακρίβεια των τριών **στηλών** του:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Πίνακες και διανύσματα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Όμοια, μπορούμε να δούμε τον πίνακα ως την *κάθετη* παράθεση 4 διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$, για την ακρίβεια των 4 **γραμμών** του:

Πίνακες και διανύσματα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Όμοια, μπορούμε να δούμε τον πίνακα ως την *κάθετη* παράθεση 4 διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^3$, για την ακρίβεια των 4 **γραμμών** του:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Διανύσματα

Δύο διανύσματα θα λέμε ότι είναι ίσα όταν έχουν την ίδια διάσταση (μήκος) και οι εκατέρωθεν εγγραφές τους είναι ίσες.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε διανύσματα

Άθροισμα Διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Πράξεις σε διανύσματα

Άθροισμα Διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός με *βαθμωτό συντελεστή*

$$c \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ \dots \\ c \cdot a_n \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.
$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

1. (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.
$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

1. (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
2. (Ουδέτερο και αντίστροφο στοιχείο) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}, u + \vec{0} = \vec{u}$.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.
$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

1. (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
2. (Ουδέτερο και αντίστροφο στοιχείο) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}, u + \vec{0} = \vec{u}$.
3. Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.
$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

1. (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
2. (Ουδέτερο και αντίστροφο στοιχείο) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}, u + \vec{0} = \vec{u}$.
3. Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.

$$\begin{aligned} c(\vec{u} + \vec{v}) &= c\vec{u} + c\vec{v} \\ (c + d)\vec{u} &= c\vec{u} + d\vec{u} \\ c \cdot (d\vec{u}) &= (c \cdot d)\vec{u}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.
$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

1. (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
2. (Ουδέτερο και αντίστροφο στοιχείο) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}, u + \vec{0} = \vec{u}$.
3. Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.

$$\begin{aligned} c(\vec{u} + \vec{v}) &= c\vec{u} + c\vec{v} \\ (c + d)\vec{u} &= c\vec{u} + d\vec{u} \\ c \cdot (d\vec{u}) &= (c \cdot d)\vec{u}. \end{aligned} \tag{1}$$

Προσοχή: Δεν προσθέτουμε διανύσματα τα οποία δεν έχουν το ίδιο μήκος, η πράξη **δεν ορίζεται**!

Γραμμκός συνδυασμός διανυσμάτων

Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ και συντελεστές $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Τότε το διάνυσμα

$$y = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n$$

Γραμμκός συνδυασμός διανυσμάτων

Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ και συντελεστές $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Τότε το διάνυσμα

$$y = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n$$

ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ με συντελεστές $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Παραδείγματα.

$$3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 1\\3\cdot 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\cdot 0\\2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

Παραδείγματα.

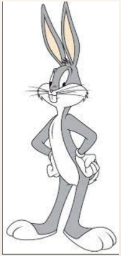
$$3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot 1\\3\cdot 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\cdot 0\\2\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

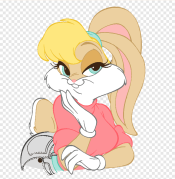
$$\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-2\\3\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+2\cdot(-2)\\4+2\cdot 3\\6+2\cdot(-3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\10\\0\end{bmatrix}$$

Πίσω στην πρώτη διάλεξη.

Πίσω στην πρώτη διάλεξη.

Ο λαγός, ο οποίος βρίσκεται στο σημείο $(0,0,0)$ θέλει να βρει το ταίρι του, το οποίο βρίσκεται σε ένα *γνωστό* σημείο του χώρου. Ο λαγός μπορεί να κινηθεί μόνο κατά μήκος κάποιων συγκεκριμένων δοθέντων *διευθύνσεων*. Μπορεί να φτάσει στο ταίρι του και αν ναι πως;





Ποιες είναι οι κινήσεις του λαγού;

⋆ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3.

Ποιες είναι οι κινήσεις του λαγού;

⋆ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο λαγός μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων).

Ποιες είναι οι κινήσεις του λαγού;

⋆ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο λαγός μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων). Να κινηθεί κατά 1 φορά πάνω στο $\vec{v}_1$, κατά 2 φορές πάνω $\vec{v}_2$ και -3.5 φορές πάνω στο $\vec{v}_3$.

Ποιες είναι οι κινήσεις του λαγού;

⋆ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο λαγός μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων). Να κινηθεί κατά 1 φορά πάνω στο $\vec{v}_1$, κατά 2 φορές πάνω $\vec{v}_2$ και -3.5 φορές πάνω στο $\vec{v}_3$.

Έτσι μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3.5\vec{v}_3$.

Ποιες είναι οι κινήσεις του λαγού;

⋆ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο λαγός μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων). Να κινηθεί κατά 1 φορά πάνω στο $\vec{v}_1$, κατά 2 φορές πάνω $\vec{v}_2$ και -3.5 φορές πάνω στο $\vec{v}_3$.

Έτσι μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3.5\vec{v}_3$.

Είναι εκεί η Χάνι Μπάνι;

Ποιες είναι οι κινήσεις του λαγού;

⋆ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο λαγός μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων). Να κινηθεί κατά 1 φορά πάνω στο $\vec{v}_1$, κατά 2 φορές πάνω $\vec{v}_2$ και -3.5 φορές πάνω στο $\vec{v}_3$.

Έτσι μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3.5\vec{v}_3$.

Είναι εκεί η Χάνι Μπάνι;
Αν όχι, πως πρέπει να κινηθεί (εφόσον ξέρει την τοποθεσία της);

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο λαγός θα μπορούσε να κινηθεί

1. Κατά 1 κατά μήκος του $\vec{v}_1$,

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο λαγός θα μπορούσε να κινηθεί

1. Κατά 1 κατά μήκος του $\vec{v}_1$,
2. Κατά -5 κατά μήκος του $\vec{v}_2$,

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο λαγός θα μπορούσε να κινηθεί

1. Κατά 1 κατά μήκος του $\vec{v}_1$,
2. Κατά -5 κατά μήκος του $\vec{v}_2$,
3. Κατά -0.5 κατά μήκος του $\vec{v}_1$.

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο λαγός θα μπορούσε να κινηθεί

1. Κατά 1 κατά μήκος του $\vec{v}_1$,
2. Κατά -5 κατά μήκος του $\vec{v}_2$,
3. Κατά -0.5 κατά μήκος του $\vec{v}_1$.
4. Κατά 7 κατά μήκος του $\vec{v}_2$.

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο λαγός θα μπορούσε να κινηθεί

1. Κατά 1 κατά μήκος του $\vec{v}_1$,
2. Κατά -5 κατά μήκος του $\vec{v}_2$,
3. Κατά -0.5 κατά μήκος του $\vec{v}_1$.
4. Κατά 7 κατά μήκος του $\vec{v}_2$.

Άρα συνολικά να φτάσει στο σημείο

$$\vec{v}_1 + (-5)\vec{v}_2 + (-0.5)\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 = 0.5\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο λαγός θα μπορούσε να κινηθεί

1. Κατά 1 κατά μήκος του $\vec{v}_1$,
2. Κατά -5 κατά μήκος του $\vec{v}_2$,
3. Κατά -0.5 κατά μήκος του $\vec{v}_1$.
4. Κατά 7 κατά μήκος του $\vec{v}_2$.

Άρα συνολικά να φτάσει στο σημείο

$$\vec{v}_1 + (-5)\vec{v}_2 + (-0.5)\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 = 0.5\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

$\star$ Συμπέρασμα: Αρκεί απλά να κινηθεί κατά 0.5 κατά μήκος του πρώτου διανύσματος και κατά 2 κατά μήκος του δεύτερου διανύσματος.

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο λαγός θα μπορούσε να κινηθεί

1. Κατά 1 κατά μήκος του $\vec{v}_1$,
2. Κατά -5 κατά μήκος του $\vec{v}_2$,
3. Κατά -0.5 κατά μήκος του $\vec{v}_1$.
4. Κατά 7 κατά μήκος του $\vec{v}_2$.

Άρα συνολικά να φτάσει στο σημείο

$$\vec{v}_1 + (-5)\vec{v}_2 + (-0.5)\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 = 0.5\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

⋆ Συμπέρασμα: Αρκεί απλά να κινηθεί κατά 0.5 κατά μήκος του πρώτου διανύσματος και κατά 2 κατά μήκος του δεύτερου διανύσματος.
⋆ **Γενικά**: Αρκεί να αποφασίσει πόσο θα κινηθεί κατά μήκος κάθε διανύσματος και να κάνει **μία** κίνηση προς κάθε διεύθυνση.

Παραδείγματος συνέχεια.

Άρα ο λαγός φτάνει σε σημεία της μορφής

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3,$$

όπου c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί, και θέλει να δει αν μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{\beta}$ της Χάνι Μπάνι.

Παραδείγματος συνέχεια.

Άρα ο λαγός φτάνει σε σημεία της μορφής

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3,$$

όπου c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί, και θέλει να δει αν μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{\beta}$ της Χάνι Μπάνι.

Διανυσματική Εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{\beta}$$

Παραδείγματος συνέχεια.

Άρα ο λαγός φτάνει σε σημεία της μορφής

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3,$$

όπου c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί, και θέλει να δει αν μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{\beta}$ της Χάνι Μπάνι.

Διανυσματική Εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{\beta}$$

Γενική μορφή:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{\beta}.$$

Οι άγνωστοι σε αυτή την εξίσωση είναι τα $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Τα διανύσματα είναι όλα **γνωστά**.

Διανυσματικές Εξισώσεις.

Διανυσματική εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{\beta}.$$

Οι άγνωστοι σε αυτή την εξίσωση είναι τα $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Τα διανύσματα είναι όλα **γνωστά**.

Διανυσματικές Εξισώσεις.

Διανυσματική εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{\beta}.$$

Οι άγνωστοι σε αυτή την εξίσωση είναι τα $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Τα διανύσματα είναι όλα **γνωστά**.

⋆ Ισοδύναμο ερώτημα: Είναι το β είναι *γραμμικός συνδυασμός* των $v_1, v_2, \ldots, v_n$;

Διανυσματική εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_n\vec{v}_n = \vec{\beta}.$$

Οι άγνωστοι σε αυτή την εξίσωση είναι τα $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Τα διανύσματα είναι όλα **γνωστά**.

$\star$ Ισοδύναμο ερώτημα: Είναι το β είναι *γραμμικός συνδυασμός* των $v_1, v_2, \ldots, v_n$;

Επί της ουσίας, ξέρουμε ήδη να λύνουμε διανυσματικές εξισώσεις ...

Άσκηση.

Προσδιορίστε αν το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμος των διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Εναλλακτική διατύπωση.

Λύστε τη διανυσματική εξίσωση

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Επίλυση.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Επίλυση.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 7 \\ 2c_1 + 5c_2 = 4 \\ -5c_1 + 6c_2 = 3 \end{cases}$$

Επαυξημένος πίνακας συστήματος

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

Διανυσματικές εξισώσεις και πίνακες.

Μια διανυσματική εξίσωση

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

έχει την ίδια λύση με τον επαυξημένο πίνακα

$$[\vec{a}_1\vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n|\vec{\beta}]$$

όπου

$$\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \ldots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

Διανυσματικές εξισώσεις και πίνακες.

Μια διανυσματική εξίσωση

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

έχει την ίδια λύση με τον επαυξημένο πίνακα

$$[\vec{a}_1\vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n|\vec{\beta}]$$

όπου

$$\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \ldots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

Κοινώς, το σύστημα όπου ο επαυξημένος πίνακας έχει στήλες τα $\vec{a}_i$ και τελευταία στήλη το $\vec{\beta}$ αντιστοιχεί στην παραπάνω διανυσματική εξίσωση.

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2n}x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & +\cdots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \ldots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

Ένα παράδειγμα

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Γεωμετρική Ερμηνεία (ξανά).

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

Γεωμετρική Ερμηνεία (ξανά).

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

⋆ Αν δούμε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ ως σημεία στον $\mathbb{R}^m$ τότε η διανυσματική εξίσωση μας ρωτάει αν υπάρχουν αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ έτσι ώστε αν κινηθούμε κατά x_i κατά μήκος του $\vec{a}_i$ να μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο $\vec{\beta}$.

Γεωμετρική Ερμηνεία (ξανά).

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$
$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

⋆ Αν δούμε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ ως σημεία στον $\mathbb{R}^m$ τότε η διανυσματική εξίσωση μας ρωτάει αν υπάρχουν αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ έτσι ώστε αν κινηθούμε κατά x_i κατά μήκος του $\vec{a}_i$ να μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο $\vec{\beta}$.

Ενδέχεται να υπάρχουν κάνενας, ένας ή άπειροι τρόποι για να συμβεί αυτό.

Γεωμετρική Ερμηνεία (ξανά).

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

⋆ Αν δούμε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ ως σημεία στον $\mathbb{R}^m$ τότε η διανυσματική εξίσωση μας ρωτάει αν υπάρχουν αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$ έτσι ώστε αν κινηθούμε κατά x_i κατά μήκος του $\vec{a}_i$ να μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο $\vec{\beta}$.

Ενδέχεται να υπάρχουν κάνενας, ένας ή άπειροι τρόποι για να συμβεί αυτό. Οι λύσεις (όλα τα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) θα έχουν και *γραμμική δομή*: $\emptyset$, σημείο, ευθεία, επίπεδο, υπερεπίπεδο.

Δύο διαφορετικοί τρόποι ανάγνωσης ενός γραμμικού συστήματος.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array}\right]$$

$\star$ Τρόπος I (<u>ανάγνωση κατά γραμμή</u>): Ποιοι είναι οι συντελεστές που ικανοποιούν κάθε εξίσωση (σημεία τομής των υπερεπιπέδων);

Δύο διαφορετικοί τρόποι ανάγνωσης ενός γραμμικού συστήματος.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array}\right]$$

⋆ Τρόπος I (<u>ανάγνωση κατά γραμμή</u>): Ποιοι είναι οι συντελεστές που ικανοποιούν κάθε εξίσωση (σημεία τομής των υπερεπιπέδων);

⋆ Τρόπος II (<u>ανάγνωση κατά στήλη</u>): Τι συντελεστές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ πρέπει να βάλω στις στήλες $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots, \vec{a}_n$ έτσι ώστε ο προκύπτων γραμμικός τους συνδυασμός να είναι το διάνυσμα $\vec{\beta}$;

Μια ματιά στο επίπεδο

Όλα τα διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός των

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

διότι

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Δεν είναι όμως το μόνο ζεύγος διανυσμάτων με αυτή την ιδιότητα!

Επίπεδο, ξανά.

Επίσης, όλα τα διανύσματα στο $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός των

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

διότι

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}(b-a)}_{c_1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \underbrace{(2a-b)}_{c_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Επίπεδο, ξανά.

Επίσης, όλα τα διανύσματα στο $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός των

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

διότι

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}(b-a)}_{c_1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \underbrace{(2a-b)}_{c_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Πώς βρίσκουμε αυτούς τους συντελεστές; Απλά λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} 2c_1 + 2c_2 = a \\ c_1 + 2c_2 = b \end{cases}$$

με αγνώστους τα c_1, c_2.

Ας γενικεύσουμε.

Ερώτηση: Ποιο είναι το σύνολο των διανυσμάτων που γράφονται σαν γραμμικός συνδυασμός των δοθέντων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$;

Ισοδύναμη διατύπωση μέσω διανυσματικής εξίσωσης: Ποια είναι τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots x_m$ έτσι ώστε

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}.$$

Γραμμική Θήκη.

Ορίζουμε ως γραμμική θήκη μίας συλλογής διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ τα οποία μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων από τη συλλογή αυτή.

$$\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} := \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Γραμμική Θήκη.

Ορίζουμε ως γραμμική θήκη μίας συλλογής διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ τα οποία μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων από τη συλλογή αυτή.

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} := \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

⋆ Η γραμμική θήκη περιέχει **διανύσματα** (σημεία).

Γραμμική Θήκη.

Ορίζουμε ως γραμμική θήκη μίας συλλογής διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ τα οποία μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων από τη συλλογή αυτή.

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} := \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

⋆ Η γραμμική θήκη περιέχει **διανύσματα** (σημεία).
⋆ Για τον λαγό η γραμμική θήκη περιέχει **όλα** τα σημεία στα οποία μπορεί να φτάσε χρησιμοποιώντας τις δοθέντες διευθύνσεις.

Γραμμική Θήκη.

Ορίζουμε ως γραμμική θήκη μίας συλλογής διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ τα $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$ τα οποία μπορούν να γραφτούν ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων από τη συλλογή αυτή.

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} := \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n | x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

⋆ Η γραμμική θήκη περιέχει **διανύσματα** (σημεία).
⋆ Για τον λαγό η γραμμική θήκη περιέχει **όλα** τα σημεία στα οποία μπορεί να φτάσε χρησιμοποιώντας τις δοθέντες διευθύνσεις.

Ισοδύναμο Ερώτημα με Διανυσματική Εξίσωση:

$$\vec{\beta} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}?$$

Παραδείγματα Γραμμικής Θήκης

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα Γραμμικής Θήκης

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \operatorname{span}\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\} = \mathbb{R}^2.$$

διότι κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ μπορεί να εκφραστεί είτε ως

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2$$

είτε ως

$$c_1'\vec{a}_2 + c_2'\vec{a}_4.$$

Παραδείγματα Γραμμικής Θήκης

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \text{span}\{\vec{a}_3, \vec{a}_4\} = \mathbb{R}^2.$$

διότι κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ μπορεί να εκφραστεί είτε ως

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2$$

είτε ως

$$c_1'\vec{a}_2 + c_2'\vec{a}_4.$$

Ωστόσο λόγω συγγραμικότητας των $\vec{a}_1, \vec{a}_3$,

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\} = \{c \cdot \vec{a}_1 : c \in \mathbb{R}\}$$

Ας δείξουμε ότι $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \mathbb{R}^2$

Αρκεί για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ το σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right]$$

να έχει λύση.

Ας δείξουμε ότι $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \mathbb{R}^2$

Αρκεί για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ το σύστημα με επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right]$$

να έχει λύση.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2a-b \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right]$$

Τι πρέπει κυρίως να κρατήσουμε.

1. Τι είναι ελεύθερες και βασικές μεταβλητές.
2. Πως γράφουμε τις λύσεις ενός συστήματος σε παραμετρική μορφή με βάση τις ελεύθερες και τις βασικές μεταβλητές.
3. Τι είναι η διάνυσμα και οι ιδιότητές του.
4. Τρόποι ανάγνωσης ενός γραμμικού συστήματος (κατά γραμή ή στήλη).
5. Τι είναι η γραμμική θήκη ενός συστήματος.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!