

Γραμμική Άλγεβρα

Πρώτη Διάλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

- Διδάσκων: Βασίλης Νάκος
- Γραφείο: B03
- eclass: <https://eclass.uoa.gr/courses/D1583>
- Ώρες διδασκαλίας:
 - Τετάρτη, 13.00- 15.00
 - Πέμπτη, 11.00 - 13.00 και 17.00-18.00 φροντιστήριο.

Δέκα Μονάδες τελική εξέταση!

- 1 Στο φροντιστήριο (17.00-18.00 τις Πέμπτες) θα λύνουμε ασκήσεις.
- 2 Στο τέλος κάποιων διαλέξεων θα αφιερώνουμε 5 λεπτά σε quiz το οποίο θα γίνεται διαθέσιμο στο e-class.

- ★ Ακολουθούμε το Interactive Linear Algebra των D.Margalit και J.Rabinoff, το οποίο υπάρχει στο e-class.

★ Ακολουθούμε το Interactive Linear Algebra των D.Margalit και J.Rabinoff, το οποίο υπάρχει στο e-class.

Επιλογές στον Εύδοξο.

- Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές (Anton and Rorres)
- Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές (Gilbert Strang)
- Μία εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα (Βάρσος, Δεριζιώτης, Εμμανουηλ, Μαλιάκας, Μιλάς, Τολίλλη)
- Γραμμική Άλγεβρα και οι Εφαρμογές της (Lay)
- Γραμμική Άλγεβρα (Δονάτος και Αδάμ)

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

* Άλγεβρα σημαίνει -χοντρικά- σχέσεις.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

- * Άλγεβρα σημαίνει -χοντρικά- σχέσεις.
- * Κάποιες σχέσεις είναι πιο 'απλές' από κάποιες άλλες!

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

* Άλγεβρα σημαίνει -χοντρικά- σχέσεις.

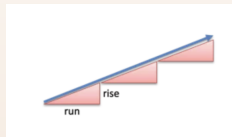
* Κάποιες σχέσεις είναι πιο 'απλές' από κάποιες άλλες!

'Γραμμική άλγεβρα' σημαίνει 'σχέσεις που προσομοιάζουν σχέσεις ευθειών.'

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

* Άλγεβρα σημαίνει -χοντρικά- σχέσεις.

* Κάποιες σχέσεις είναι πιο 'απλές' από κάποιες άλλες!
'Γραμμική άλγεβρα' σημαίνει 'σχέσεις που προσομοιάζουν σχέσεις ευθειών.'



Γραμμική σχέση και μη γραμμική σχέση.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Οι γραμμικές σχέσεις είναι **πιο προβλέψιμες**, έχουν περισσότερη δομή.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Οι γραμμικές σχέσεις είναι **πιο προβλέψιμες**, έχουν περισσότερη δομή.

Παράδειγμα: Σε μία βουνοπλαγιά, αν κινηθούμε 3 χλμ οριζόντια τότε ανεβαίνουμε κατά 1χλμ σε ύψος. Αν κινηθούμε 6 χλμ οριζόντια αναμένουμε να ανέβουμε κατά 2χλμ. Τι συμβαίνει αν η πλαγιά έχει σχήμα θόλου;

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Θα μελετήσουμε διάφορους τύπους γραμμικών σχέσεων με σκοπό να τις κατανοήσουμε και να ανακαλύψουμε την (συχνά κοινή) τους δομή.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Θα μελετήσουμε διάφορους τύπους γραμμικών σχέσεων με σκοπό να τις κατανοήσουμε και να ανακαλύψουμε την (συχνά κοινή) τους δομή.

Αλγεβρική (συμβολική) αλλά και **γεωμετρική** αναπαράσταση.

Γιατί μελετάμε Γραμμική Άλγεβρα;

- Επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Γιατί μελετάμε Γραμμική Άλγεβρα;

- Επίλυση γραμμικών συστημάτων.
- Μοντελοποίηση πολλών προβλημάτων σε πληθώρα κλάδων.

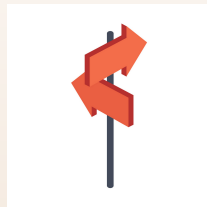
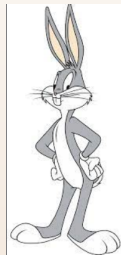
Γιατί μελετάμε Γραμμική Άλγεβρα;

- Επίλυση γραμμικών συστημάτων.
- Μοντελοποίηση πολλών προβλημάτων σε πληθώρα κλάδων.
- Εφαρμογές σε
 - 1 Επεξεργασία σήματος
 - 2 Στατιστική
 - 3 Μηχανική Μάθηση
 - 4 Γραφικά
 - 5 Ρομποτική

Δύο παραδείγματα.

Δύο παραδείγματα.

Ο λαγός, ο οποίος βρίσκεται στο σημείο $(0, 0, 0)$ θέλει να βρει το ταίρι του, το οποίο βρίσκεται σε ένα γνωστό σημείο του χώρου. Ο λαγός μπορεί να κινηθεί μόνο κατά μήκος κάποιων συγκεκριμένων δοθέντων διευθύνσεων. Μπορεί να φτάσει στο ταίρι του και αν ναι πως;



Δύο Παραδείγματα.



Ο Πανοραμίξ έχει ένα μεγάλο σύνολο από καζάνια με καθένα να περιέχουν ένα μίγμα, το οποίο αποτελείται από 4 αριθμούς. Κάθε αριθμός είναι η ποσοότητα που περιέχει από καθένα από τα 4 στοιχεία που έχει (η οποία μπορεί να είναι και αρνητική!!). Θέλει να εξοικονομήσει χώρο στο σπίτι του και έτσι θέλει να κρατήσει τον ελάχιστο αριθμό καζανιών έτσι ώστε να μπορεί να παράγει όλους τους ζωμούς που μπορεί να παράγει έχοντας όλα τα καζάνια.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0.12 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.33 \\ -1.3 \\ -2.7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.1 \\ -2.02 \\ 0.12 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \dots$$

Δύο παραδείγματα γραμμικών συστημάτων.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Δύο παραδείγματα γραμμικών συστημάτων.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Το $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ είναι μία πιθανή λύση - αλλά όχι η μόνη λύση.

Δύο παραδείγματα γραμμικών συστημάτων.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Το $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ είναι μία πιθανή λύση - αλλά όχι η μόνη λύση.
★ Το σύνολο των τριάδων (x, y, z) που επαληθεύουν κάθε εξίσωση ονομάζεται **λύση** του συστήματος.

Δύο παραδείγματα γραμμικών συστημάτων.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Το $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ είναι μία πιθανή λύση - αλλά όχι η μόνη λύση.
★ Το σύνολο των τριάδων (x, y, z) που επαληθεύουν κάθε εξίσωση ονομάζεται **λύση** του συστήματος.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ -x - y = -7 \end{cases}$$

Καμία λύση!

Δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Θεώρημα

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει μήδεν, μία ή άπειρες λύσεις!

Δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Θεώρημα

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει μόνον, μία ή άπειρες λύσεις!

Γεωμετρική ερμηνεία ως τομή ευθειών ή επιπέδων!

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των ευθειών

$$x + y = 8, x - y = 9.$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **ευθειών**

$$x + y = 8, x - y = 9.$$

★ Μία ευθεία είναι όλα τα (x, y) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των ευθειών

$$x + y = 8, x - y = 9.$$

★ Μία ευθεία είναι όλα τα (x, y) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **ευθειών**

$$x + y = 8, x - y = 9.$$

★ Μία ευθεία είναι όλα τα (x, y) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **επιπέδων**

$$x + y + z = 8, x - y + 3z = 9.$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **ευθειών**

$$x + y = 8, x - y = 9.$$

★ Μία ευθεία είναι όλα τα (x, y) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **επιπέδων**

$$x + y + z = 8, x - y + 3z = 9.$$

★ Ένα επίπεδο είναι όλα τα (x, y, z) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

Όταν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- Καμία λύση \Rightarrow **Ασύμβατο**

Όταν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- Καμία λύση \Rightarrow **Ασύμβατο**
- Ακριβώς μία λύση \Rightarrow **Συμβατό**

Όταν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- Καμία λύση \Rightarrow **Ασύμβατο**
- Ακριβώς μία λύση \Rightarrow **Συμβατό**
- Άπειρες λύσεις \Rightarrow **Υπερκαθορισμένο**

- **Ασύμβατο** \Rightarrow Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **δεν** τέμνονται!

- **Ασύμβατο** \Rightarrow Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **δεν** τέμνονται!
- **Συμβατό** \Rightarrow Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **τέμνονται** σε ακριβώς ένα σημείο.

- **Ασύμβατο** \Rightarrow Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **δεν** τέμνονται!
- **Συμβατό** \Rightarrow Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **τέμνονται** σε ακριβώς ένα σημείο.
- **Υπερκαθορισμένο** \Rightarrow Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) τέμνονται σε **άπειρα** σημεία!

Καμία λύση

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

Καμία λύση

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

Άπειρες λύσεις

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Καμία λύση

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

Άπειρες λύσεις

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Μία λύση

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

Ξέρουμε δύο βασικές πράξεις.

- Προσθέτουμε σε μια εξίσωση το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.

Ξέρουμε δύο βασικές πράξεις.

- **Προσθέτουμε** σε μια εξίσωση το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.
- **Πολλαπλασιάζουμε** τους όρους μιας εξίσωσης με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

* Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 4 φορές την πρώτη και παίρνω

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -3y + 13z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -3y + 13z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -3y + 13z = -9 \end{cases}$$

* Διαιρώ την 2η εξίσωση με δύο και προσθέτω στην 3η εξίσωση 3 φορές την 2η.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y - 4z = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

Αναπαράσταση Γραμμικών Συστημάτων.

Έστω m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = \beta_m$$

Αναπαράσταση Γραμμικών Συστημάτων.

Έστω m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = \beta_m$$

$$2x_1 + 5x_2 + \dots - 2x_n = -1$$

$$-3x_1 + 6x_2 + \dots + 8x_n = -2$$

...

$$4x_1 + 5x_2 + \dots + 8x_n = -2$$

Έστω m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = \beta_m$$

Έστω m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = \beta_m$$

Πίνακας συντελεστών:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο συμβολισμός $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ θα χρησιμοποιείται για να υποδείξουμε ότι ο πίνακας έχει m γραμμές, n στήλες και έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Αναπαράσταση συστήματος: Ο επαυξημένος πίνακας

Βάζουμε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους σταθερούς όρους σε μια κοινή αναπαράσταση.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array} \right]$$

Αναπαράσταση συστήματος: Ο επαυξημένος πίνακας

Βάζουμε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους σταθερούς όρους σε μια κοινή αναπαράσταση.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array} \right]$$

* Κάθε στήλη πλην της τελευταίας αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή και κάθε γραμμή σε μία εξίσωση.

Αναπαράσταση συστήματος: Ο επαυξημένος πίνακας

Βάζουμε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους σταθερούς όρους σε μια κοινή αναπαράσταση.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array} \right]$$

- * Κάθε στήλη πλην της τελευταίας αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή και κάθε γραμμή σε μία εξίσωση.
- * Η τελευταία στήλη αντιστοιχεί στους σταθερούς όρους.

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

Σύστημα 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

Τρεις κανόνες για να δουλέψουμε πάνω στον επαυξημένο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

Τρεις κανόνες για να δουλέψουμε πάνω στον επαυξημένο πίνακα:

- 1 **Προσθέτουμε** σε μια γραμμή (εξίσωση) το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

Τρεις κανόνες για να δουλέψουμε πάνω στον επαυξημένο πίνακα:

- 1 **Προσθέτουμε** σε μια γραμμή (εξίσωση) το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.
- 2 **Ανταλλάσσουμε** θέσεις δύο γραμμών (εξισώσεων).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

Τρεις κανόνες για να δουλέψουμε πάνω στον επαυξημένο πίνακα:

- ➊ Προσθέτουμε σε μια γραμμή (εξίσωση) το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.
- ➋ Ανταλλάσσουμε θέσεις δύο γραμμών (εξισώσεων).
- ➌ Πολλαπλασιάζουμε τους όρους της γραμμής (εξίσωσης) με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

★ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 4 φορές την πρώτη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

★ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 4 φορές την πρώτη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

★ Πολλαπλασιάζω την δεύτερη εξίσωση με $1/2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

★ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 3 φορές τη δεύτερη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

★ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 3 φορές τη δεύτερη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

★ $x_3 = 3$. Προσθέτω στην δεύτερη εξίσωση 4 φορές την 3η.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

* $x_3 = 3$. Προσθέτω στην πρώτη εξίσωση 2 φορές την 2η.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$\star x_3 = 3$. Προσθέτω στην πρώτη εξίσωση 2 φορές την 2η.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$\star x_1 = 29, x_2 = 16, x_3 = 3$.

Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις σε πίνακες.

- 1 **Αντικατάσταση** μιας γραμμής από το άθροισμα του εαυτού της και ενός πολλαπλάσιου μια γραμμής.
- 2 **Ανταλλαγή** δύο γραμμών μεταξύ τους.
- 3 **Πολλαπλασιασμός** όλων των στοιχείων μιας γραμμής με μη μηδενική σταθερά.

Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες: Ο ένας μετασχηματίζεται στον άλλον μέσω γραμμοπράξεων.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -3 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \end{array} \right]$$

Τα αριστερότερα μη μηδενικά στοιχεία κάθε γραμμής δημιουργούν μια σκάλα.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -3 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \end{array} \right]$$

Τα αριστερότερα μη μηδενικά στοιχεία κάθε γραμμής δημιουργούν μια σκάλα.

★ Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής αποκαλείται οδηγός.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -3 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \end{array} \right]$$

Τα αριστερότερα μη μηδενικά στοιχεία κάθε γραμμής δημιουργούν μια σκάλα.

- ★ Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής αποκαλείται οδηγός.
 - Αν υπάρχουν γραμμές που έχουν μόνο μηδενικά, αυτές έρχονται τελευταίες.
 - Ο οδηγός κάθε γραμμής βρίσκεται τουλάχιστον μια στήλη πιο δεξιά από τον οδηγό της προηγούμενης γραμμής.

Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array} \right]$$

- Κάθε οδηγός ισούται με 1.
- Κάθε οδηγός είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Κλιμακωτή ✓ αλλά όχι ανηγμένη κλιμακωτή X.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array} \right]$$

Κλιμακωτή ✓ αλλά όχι ανηγμένη κλιμακωτή X .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array} \right]$$

Όχι κλιμακωτή X .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array} \right]$$

Κλιμακωτή ✓ αλλά όχι ανηγμένη κλιμακωτή X .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array} \right]$$

Όχι κλιμακωτή X .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array} \right]$$

Ανηγμένη κλιμακωτή ✓✓.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!